The Department of Public Instruction, Bombay.

THE FIRST BOOK

OF

EUCLID'S ELEMENTS OF GEOMETRY

FOR

GUJARATI SCHOOLS.

BY

JAMSHEDJEE ARDESHIR DALÁL, M.A., LL.B.,
PRINCIPAL, GUJARAT COLLEGE, AHMEDABAD.

The Department of Public Instruction, Bombay.

THE FIRST BOOK

OF

EUCLID'S ELEMENTS OF GEOMETRY

FOR

GUJARATI SCHOOLS.

BY

JAMSHEDJEE ARDESHIR DALÁL, M.A., LLB.

PRINCIPAL, GUJARAT COLLEGE, AHMEDABAD.

10,000 COPIES.

Bombay:
GOVERNMENT CENTRAL BOOK DEPÔT.

1889.

Price As. 8.

BOMBAY:
PRINTED AT THE EDUCATION SOCIETY'S PRESS, BYCULLA.

ઝરપ૩

મુંબઇ ઇલાકાનું કેળવણીખાતું.

યુક્લિડની ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વો

સ્કંધ ૧.

ગુજરાતી નિશાળોને માટે.

જમશેદજી અરદેશર દલાલ

એમ. એ.; એલ એલ. બી.;

અમદાવાદ ગુજરાત કોલેજના પ્રિન્સિપાલ એઓએ રચ્યો

૧૦,૦૦૦ પ્રતો.

મુંબઈ:

ગવર્નમેંટ સેંટ્રલ બુક ડીપો.

૧૮૮૫.

કિંમત ૮ આના.

મુંબઈ:
એજ્યુકેશન સોસાઈટીના છાપખાનામાં છાપ્યું છે.

પ્રસ્તાવના.

ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વનું ભાષાન્તર ઘણાં વર્ષ ઉપર ઉત્તર વિભાગના ગુજરાતીભાષાન્તરકર્ત્તા મેહેરબાન જેમ્સ ગ્રેહામ સાહેબે ગુજરાતી ભાષામાં પ્રસિદ્ધ વિદ્વાન મેહેરબાન નંદશંકર તુળજાશંકરની અમુલ્ય સહાયતાથી કર્યું હતું. ઘણી રીતે એ ભાષાન્તર ઉત્તમ છે, તોપણ એ વિષયમાં પ્રવેશ પામેલા વિદ્યાર્થી શિવાય બીજાઓને એ સ્પષ્ટ અને સુગમ પડે એવું નથી. એની ભાષા સંક્ષિપ્ત છે, અને સિદ્ધાંતનો પક્ષ પણ તેવાજ સંક્ષેપમાં સિદ્ધ કર્યો છે. પક્ષમાંનાં સ્પષ્ટ અથવા સેહેલથી સમજાય એવાં સિદ્ધાતાનાં કારણો મૂકી દેવામાં આવ્યાંછે, અને માત્ર મુખ્ય કારણજ આપ્યાંછે. એ પુસ્તક ઉંચા વર્ગના શિષ્યોને માટે લખેલું હોય એમ સ્પષ્ટ ભાસે છે: કેમકે એમાં આપેલી ટીકાથી પણ વાંચનારનું મન ગણિતશાસ્ત્રનાં ઉંચાં પ્રકરણ તરફ લોભાય છે. પણ એ ગ્રન્થનો હેતુ નવાસવા શિષ્યોને મદદ કરવાનો નથી અથવા હલકા વર્ગની પરીક્ષા માટે શાલાપુસ્તક તરીકે છપવાનો નથી. તેથી એવી મતલબ એ ગ્રન્થથી સરે!નહિ, અને વર્ગમાં નવાસવા શિષ્યોને આ વિષય શિખવવો હોય એવા શિક્ષકો તરફથી એ ગ્રન્થની સામા વાજબી વાંધો ઉઠે એમાં કંઈ નવાઈ નથી. આ કારણથી કેળવણીખાતાના અધિપતિએ અંગ્રેજી નિશાળોમાં નીચલા વર્ગમાં ચાલતા ઉત્તમ ગ્રન્થોનો નમુનો લઈ ગુજરાતીશાલા માટે બીજું ભાષાન્તર તૈયાર કરવા હુકમ કર્યો.

તેજ પ્રકારનો પ્રયત્ન આ પુસ્તકમાં કરવામાં આવ્યો છે. આ ગ્રન્થને સેહેલી તેમજ શુદ્ધ ભાષામાં લખવાને ઘણીજ સંભાળ

લીધી છે; અને આશા રાખવામાં આવે છે કે શિક્ષકોને આ વિષય શિખવવાની મેહેનત ઓછી પડશે એટલુંજ નહિ પણ ઉદ્યોગી શિષ્ય શિક્ષકની મદદથી અથવા મદદ શિવાય પણ આ વિષયમાં સારૂં જ્ઞાન સંપાદન કરવા શક્તિમાન થશે.

પારિભાષિક શબ્દો મેહેરબાન ગ્રેહામ સાહેબના ભાષાન્તરમાંથી લીધા છે. પણ રા૦ રા૦ રાવજી મોરેશ્વર દેવકુળેની મરાઠી ભૂમિતિમાંથી ઘણી અમુલ્ય સૂચનાઓ મળી આવી છે. ઘણા સવાલ પણ એમનાજ ગ્રન્થમાંથી દાખલ કીધા છે. આ માટે ઘણી ખુશીથી હું એમનો ઉપકાર માનુંછું.

આ ગ્રન્થની સામાન્ય રચના ઉત્તર વિભાગના કેળવણીખાતાના પરીક્ષક મેહેરબાન જાઇલ્સ સાહેબના કહેવા પ્રમાણે હૉલ અને સ્ટીવન્સની ભૂમિતિભાગ ૧ ને અનુસરીને કીધીછે. આ ભૂમિતિ પુસ્તક હાલમાં નવાં લખાયલાં પુસ્તકોમાંનું એક છે, અને અંગ્રેજી નિશાળોમાં શાલાપુસ્તક તરીકે ઘણું ફત્તેહમંદ નીવડયું છે. એ પુસ્તક રચનારાઓએ પોતાના શાલાપુસ્તકોની રચના ઘણા અનુભવી શિક્ષકોની અનુમતિ લઈ કીધી છે, અને એ શિક્ષકો તરફથી તેમને ઘણી કિમતિ સૂચનાઓ મળી છે. તે અંગ્રેજી પુસ્તકને અનુસરીને આ ગ્રન્થ લખવામાં આવ્યો છે; તેથી એ ગ્રન્થનો હેતુ બરોબર પાર પડશે એવી આશા રાખવામાં આવેછે.

'પૉટસ અને ટૉડહન્ટર'ના ગ્રન્થોમા આપ્યાંછે તેમજ સિદ્ધતાનાં બધાં કારણો અનુક્રમે આપ્યાં છે. વળી સિદ્ધતા સ્પષ્ટ કરવા માટે નવાં કારણો પણ દાખલ કર્યાં છે; પણ એવું ક્વચિતજ કરવામાં આવ્યું છે, જેમકે પેહેલા સ્કંધના ૪૪મા સિદ્ધાંતમાં. દરેક સિદ્ધાંતમાં પ્રતિજ્ઞા, સાધન, રચના, અને સિદ્ધતા ખુલ્લી રીતે પૃથક્ પાડયાં છે, અને પ્રત્યેક નવું સિદ્ધાંતનું કારણ

નવી લીટીમાં શરૂ કર્યું છે. વિદ્યાર્થીને આ વિષયને લગતી આ-જુબાજૂની બાબદમાં મદદ કરવાને ગૂજરાતી ભાષામાં ગ્રન્થ ન હોવાથી સઘળી વ્યાખ્યાઓ, સ્વીકૃતકૃત્યો, અને પ્રત્યક્ષપ્રમાણો ઉપર પુષ્કળ ટિપ્પણ આપ્યું છે, અને એ શબ્દો બરોબર સ-મજાવવા ઘણી મેહેનત લીધી છે. વળી સઘળા અગત્યના સિ-દ્ધાંતો ઉપર પણ ઘણી ટીકા કરવામાં આવી છે.

દરેક સિદ્ધાંતને લગતા થોડાક સવાલ આપવામાં આવ્યા છે. એમાંના ઘણા આકૃતિમાં અથવા રચનામાં લીટીઓનો ફેરફાર કરવાના સંબંધમાં આપ્યા છે. અગત્યના સિદ્ધાંતના દરેક સમૂ-હને અન્તે સેહેલા પ્રશ્નો આપવામાં આવ્યા છે. આ બધા સ-વાલો અને પ્રશ્નો યાતો વર્ગમાં અથવા ઘેરથી મનોયત્ન તરીકે શિષ્યવર્ગ પાસે શિક્ષક સિદ્ધ કરાવશે તો ઘણો ફાયદો થશે. આ-સરે સો સવાલ બધું મળીને છે અને તેટલાજ પ્રશ્નો પણ છે.

અઘરા સિદ્ધાંત સુગમ કરવાની મતલબથી કેટલેક પ્રસંગે, જેમકે ચોથા સિદ્ધાંતમાં, સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરતાં પેહેલાં સમજુતિ માટે ટિપ્પણ આપવામાં આવ્યું છે. એવી જાતનાં ૬, ૭, અને ૨૭ સિદ્ધાંત ઉપરનાં ટિપ્પણથી શિક્ષકને શિખવવાના કામમાં ઘણી સહાયતા મળશે એમ ધારવામાં આવે છે.

જી૦ એ૦ દ.

અમદાવાદ,

જુલાઈ ૧૮૮૮.

યુક્લિડની

ભૂમિતિનાં મૂલતત્ત્વો.

સ્કંધ પહેલો.

કોઈપણ પારિભાષિક શબ્દનો અર્થ જે વાક્યમાં કહેલો હોય તે વાક્યને તે શબ્દની વ્યાખ્યા સમજવી.

વ્યાખ્યાઓ (૧–૪).

૧. બિંદુ તેને કહેવું કે જેને સ્થિતિ છે, પણ જેને કાંઈ મહત્ત્વ નથી. (એટલે જેનો ભાગ થઈ શકે નહિ.)

૨. લીટી તેને કહેવી કે જેને લંબાઈ છે, પણ પહોળાઈ નથી.

૩. ઉપલી બે વ્યાખ્યાઓ ઉપરથી સ્પષ્ટ છે કે લીટીના છેડાઓ તે બિંદુ હોવા જોઈએ; અને બે લીટીઓ એકેકને કાપે ત્યાં એક બિંદુ હોવું જોઈએ.

૪. સીધી લીટી તેને કહેવી કે જે તેના બે છેડાઓ વચ્ચે સમાન રહેલી હોય.

આ વ્યાખ્યાઓ વિશે થોડી સમજ આપવી જરૂરની છે.

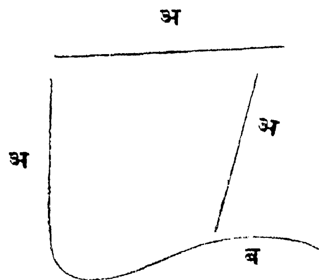
(૧). આપણે સાધારણ રીતે એક બિંદુનો વિચાર તો એક અનુસ્વારનો, જેમકે 'બિંદુ' શબ્દમાં 'બિ' ને માથે હોયછે તેનો, કરિયે છિયે; પણ ૧ વ્યાખ્યા પ્રમાણે તો ગણિતવિદ્યાનું એ

બિંદુ કહેવાઈ શકે નહિ. કારણ એ બિંદુ ગમે એવું ઝીણું હોય તોપણ એને કાંઈ પણ મહત્ત્વ તો હોવું જોઈએજ. જો આપણે એક સૂક્ષ્મદર્શક યંત્ર વડે એને જોઈશું તો એ મ્હોટું દેખાશે; અને જો ઘણાંજ સૂક્ષ્મ અને બારીક હથિયારો આપણી પાસે હોય તો એવાં બિંદુના તો ભાગ કરી શકિયે; આ ઉપરથી તો આપણે જોઈએ છિયે કે એને મહત્ત્વ તો છે, જો ન હત તો ભાગ થઈ શકત નહિ. ત્યારે સવાલ કે એ વ્યાખ્યા પ્રમાણેનું બિંદુ કેવું હશે? એનો જવાબ આપવો કઠણ છે; પણ ધારો કે એ ન્હાના બિંદુનો એક ઘણોજ ન્હાનો ભાગ લઈએ; પછી તે ભાગનો વળી એક ઘણોજ ન્હાનો ભાગ લઈએ; પછી તેનો ન્હાનો ભાગ લઈએ; એમ કરતાં એટલે સુધી ભાગ લેતા જઈએ કે છેલ્લે અનન્ત ઘટાડો કરવાથી જે રહે તેનો ભાગ થઈ શકે નહિ. આ જે છેલ્લે અવિભાજ્ય બિંદુ રહ્યું તેનું નામ ભૂમિતિનું બિંદુ. એ બિંદુ તો કલ્પનાનું છે. કાંઈપણ નિશાની મૂકી તો તેને તુરતજ મહત્ત્વ લાગુ પડ્યું. માટે એ બિંદુ ખરેખરૂં કહેતાં તો દર્શાવાઈ શકાયજ નહિ. પણ આટલા ઉપરથી વિદ્યાર્થીએ ગુંચવાઈને એમ ન ધારવું કે ભૂમિતિમાં તો ફક્ત કલ્પનાના વિચારો છે. વ્યાખ્યાઓ તો શુદ્ધ ગણિતવિદ્યાપ્રમાણે આપવી જોઇએ; પણ એ બિંદુનો પ્રકાશ મન ઉપર પાડવા માટે તો એક ઝીણું ટપકું વિચારવુંજ જોઈએ. એટલું યાદ રાખવું કે તે કલ્પિત છે, અને તેનો ભાગ થઈ શકે નહિ.

(૨). બિંદુ વિશે ઉપર પ્રમાણે સમજ આવી તોપછી લીટીનો વ્યાખ્યા પ્રમાણેનો વિચાર મનમાં ઉત્પન્ન સહેલથી થશે. એવાં અગણિત બિંદુઓ એકેકની જોડાજોડ એકજ દિશામાં આવે તો લીટી થાય; અથવા કલ્પનામાં એવું ધારીએ કે આવું એક ગણિતવિદ્યાનું બિંદુ અવકાશમાં ચલન પામીને એક સ્થલથી બીજે સ્થલે ગયું, અને તેના માર્ગ ઉપર આપણે નિશાની કરી

રાખી તો આ માર્ગ તે લીટી થઈ. હવે એ તો સ્પષ્ટ છે કે આવો વિચાર લીટીનો લઈએ તો તેવી લીટીને લંબાઈ માત્રજ છે; પહોળાઈ નથી. કારણ કે બિંદુને પહોળાઈ નથી, અને તેવું વગર પહોળાઈનું બિંદુ એક સ્થલથી બીજે સ્થલે સીધું ચાલ્યું ગયું તો તે માર્ગને પહોળાઈ તો આવીજ નહિ. આ ગણિતશાસ્ત્ર પ્રમાણે લીટીની વ્યાખ્યા થઈ; અને તેનો વિચાર પણ ઉત્પન્ન થઈ શક્યો. પણ આવી લીટી આપણે જોઈ શકતા નથી; અથવા દોરી પણ શકતા નથી. એવી લીટી પ્રત્યક્ષ જણાઈ શકતી નથી: કારણ કે ગમે તેવી ઝીણી લીટી દોરીએ તેને કાંઈપણ જાડાઈ તો હોયજ. પણ જેમ એક બિંદુ દર્શાવવા માટે ટાંપ મુકિયે તો ચાલે તેમ કલ્પિત લીટીને માટે એક પાતળી લીટી દોરિયે તો ચાલે.

(૩). આવી બે લીટીઓ એકેકને છેદે તો જે જગ્યાએ છેદે ત્યાં બિંદુ હોવું જોઈએ. એ તો સ્પષ્ટ છે; અને ઉપર કહ્યું તેમ લીટી જો બિંદુના વેગથી થતી હોય તો લીટીને બન્ને છેડે એટલે આરંભે અને અન્તે બે બિંદુઓજ હોવાં જોઈએ. જો બે આપેલાં બિંદુઓ વચ્ચે એક લીટી દોરિયે તો તે **સમર્યાદ** કહેવાય. પણ જો તેમ કરતાં એક અથવા બન્ને બાજુએથી તે લીટી ગમે તેટલી લંબાવી શકાય તો તેને **અમર્યાદ** લીટી કહે છે.



(૪). લીટી બે પ્રકારની હોઈ શકે; સીધી લીટી જેમકે अ; અને વક્ર લીટી અથવા આડી લીટી જેમકે ब. अ લીટી તેના બે છેડાઓ વચ્ચે સમાન રહેલી છે: એટલે જો એક છેડે આંખ અડકાડીને તે લીટીની દિશાએ જોઈશું તો તે છેડેનું

એક બિંદુજ દેખાશે, બીજાં તે લીટીનાં બિંદુઓ દેખાશે નહિ. પણ ब લીટી એવી નથી.

ટીપઃ—વિદ્યાર્થીએ એવી ભુલ કરવાનો સંભવ છે કે, એક કાગળ લખતાં કોઈ સીધી લીટીઓ લખી શકેછે, અને કોઈ વધારે કે ઓછી આડી લીટીઓ લખેછે, તેમ અહિંયા પણ સીધી અને આડી લીટી વચ્ચે તફાવત હશે; પણ તેમ નથી, એ ખુબ ધ્યાનમાં રાખવું.

ઉપલી આકૃતિઓ ઉપરથી જણાશે કે अ વાળી બધી લીટીઓ સીધી છે; માત્ર ब આડી અથવા વક્ર છે.

"બે બિંદુઓની વચ્ચે જે ટુંકાંમાં ટુંકું અન્તર તે સીધી લીટી" એવી કોઈ વાર સીધી લીટીની વ્યાખ્યા લખાયછે; તે પણ ખરી વ્યાખ્યા છે એવું જણાશે.

વળી એ પણ સ્પષ્ટ છે કે જો બે અમર્યાદ સીધી લીટીઓ અવકાશમાં એવી રીતે મળે કે બન્નેની દિશા એકજ હોય, તો પછી તે બેમાંની કોઈપણ લીટી તે દિશા છોડીને નિરાળી દિશાએ જઈ શકશે નહિ; કારણ કે જો તેમ થાય તો સીધી લીટીની વ્યાખ્યાથી ઉલટું થાય.

अ• ——————— क ——————— •ब

આ આકૃતિમાં अ અને ब સીધી લીટીઓ क બિંદુમાં એવી રીતે મળેછે કે તેમની દિશા સરખીજ છે તો તે બે મળીને એકજ લીટી થશે. હવે પછી એ બેમાંની એક લીટી બીજીથી જુદી પડનાર નથી. એમ પણ સિદ્ધ થઈ શકે કે જો બે સીધી લીટીઓમાં બે બિંદુ સાધારણ હોય તો તે બે સીધી લીટીઓ એકેકની ઉપરજ પડશે.

બે સીધી લીટીઓ એકેકને મળી ન જાય તો એકજ બિંદુમાં

એકેકને છેદશે; એકથી વધારે બિંદુમાં છેદી શકે નહિ તે પણ દેખીતુંજ છે.

વ્યાખ્યા (૫—૭).

૫. જેને લંબાઈ અને પહોળાઈજ માત્ર હોય તેને સફાઈ કહે છે.

૬. સફાઈના છેડાઓ લીટીઓથી થયલા હોયછે.

૭. સપાટ સફાઈ તેને કહેવી કે જે તેના છેડાઓની વચ્ચે સમાન રહેલી હોય; અથવા જેમાં કોઈ પણ બે બિંદુઓ લઈને એક બિંદુથી બીજા સુધી એક સીધી લીટી દોરિયે તો તે સીધી લીટી તે સફાઈની અંદરજ પડે અને બહાર જાય નહિ.

(૫). જેમ બિંદુના ચલનથી લીટીની કલ્પનાનો નિશ્ચય થાયછે, તેમ લીટીના ચલનથી સફાઈની કલ્પના મળી શકેછે. જો એક ગણિતવિદ્યાની રેષા ચલન પામે એમ ધારિયે અને જે અવકાશમાં તે ચલન પામેછે તેમાં કાંઈ નિશાની પડે, તો તે નિશાની એક સફાઈ દર્શાવશે. એ તો દેખીતુંજ છે કે જ્યારે લીટીને ફક્ત લંબાઈજ હોયછે અને જાડાઈ કે પહોળાઈ હોતી નથી ત્યારે લીટીના ચલનથી જે સફાઈ ઉત્પન્ન થઈ તેને લંબાઈ તથા પહોળાઈજ હોઈ શકે; પણ તેને જાડાઈ હોઈ શકે નહિ.

ધારો કે એક સીધી લીટી અથવા દોરી ચુનામાં અથવા ચાકમાં પલાળીને એક ટેબલના સપાટ મથાળાં ઉપર તેના બન્ને છેડા ખેંચી રાખીને ફેરવિયે; તો તે ટેબલના ઉપર સફેદ રંગની આકૃતિ પડશે; એ એક સફાઈ થઈ; એને લંબાઈ પહોળાઈ છે; પણ જાડાઈ નથી.

(૬). વળી એ દોરી ગમે તેમ પકડીને ગમે તે પ્રકારની આકૃતિ પાડી હોય તોપણ તે આકૃતિને છેડે તો લીટીજ બનવાની.

(૭). જો એક સપાટ ટેબલના મથાળાં ઉપર ન ફેરવતાં એવી દોરી એક પૃથ્વીના ગોળા ઉપર ફેરવી હોય તોપણ એક સફાઈની આકૃતિ આવશે; પણ તે કાંઈ સપાટ સફાઈ થશે નહિ; ટેબલ ઉપર બનાવેલી સફાઈમાં તો બે બિંદુઓ જોડીશું તો તે જોડનારી લીટી ટેબલ ઉપરજ રહેશે; પણ આ ગોળા ઉપરની સફાઈમાં તો એવાં બે બિંદુઓ એક લીટીથી જોડીશું તો તે લીટી ગોળાની અંદરથી પડશે, અને ગોળાની સફાઈ ઉપર પડશે નહિ. આ ઉપરથી સફાઈ અને સપાટ સફાઈ વચ્ચેનો ફેર સમજ પડશે. જે સફાઈ સપાટ ન હોય તેને **વક્ર સફાઈ** કહેછે.

ટીપઃ—કોઈપણ નક્કર પદાર્થ લઈયે તો તેના મહત્ત્વના ત્રણ પરિમેય અથવા પ્રકાર હોયછે; (૧) લંબાઈ, (૨) પહોળાઈ, (૩) ઉંચાઈ અથવા જાડાઈ. ધારો કે એક ચોપડી લીધી, તો તેને એ ત્રણે પરિમેય લાગુ પડશે. હવે એ ચોપડીને ટેબલ ઉપર મૂકીને તેનું ઉપરનું સપાટ મથાળુંજ જોઈએ તો તેની ફક્ત લંબાઈ અને પહોળાઈજ દેખાશે; માટે તે **સફાઈ** કહેવાય; પણ એમ નહિ સમજવું કે તે ચોપડીનું પુંઠું ફાડી લીધું તો તે **સફાઈ** થશે; કારણ કે તેને જરાપણ જાડાઈ હશેજ; એટલે તે તો નક્કર પદાર્થ થયો. પણ જાડાઈ ન વિચારતાં ફક્ત પુંઠાના ઉપલા ભાગની આકૃતિનોજ કલ્પનામાં વિચાર કરિયે તો તે **સફાઈ.** એજ સફાઈને છેડે ચાર લીટીઓ આવી, તે લીટીઓનો પણ કલ્પનાથી એવો વિચાર કરવો કે તેને લંબાઈજ છે; પણ જાડાઈ અથવા પહોળાઈ નથી તો તે ગણિતની લીટી થઈ; અને જે ખૂણે લીટીઓ મળેછે, તે બિંદુઓ થયાં.

આ ઉપરથી જણાશે કે,

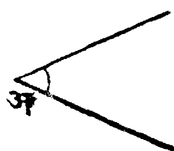
૧. નક્કર પદાર્થ દેખીતો છે અને તેને લંબાઈ, પહોળાઈ, તથા જાડાઈ ત્રણે હોયછે.

૨. સફાઈ કલ્પનાથી વિચારાયછે; અને તેને લંબાઈ તથા પહોળાઈ બેજ હોયછે; જાડાઈ હોતી નથી.

૩. લીટી કલ્પનાથી વિચારાયછે; અને તેને એકલી લંબાઈજ હોયછે.

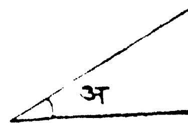
૪. બિંદુ કલ્પનાથી વિચારાયછે; અને તેને કોઈ પણ જાતનું મહત્ત્વ હોતું નથી.

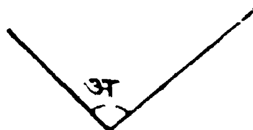
વ્યાખ્યા (૮—૯).



૮. બે લીટીઓ એકજ સફાઈમાં હોય પણ એકજ દિશામાં ન હોય તો એવી બે લીટીઓની પરસ્પરની વક્રતા એટલે ઝોકને समतल खूणा કહે છે.

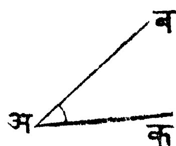
૯. જો બે સીધી લીટીઓ એકેક સાથે એકજ સફાઈમાં મળે, પણ એકજ દિશામાં જોડાઈ જતી નહોય, તો તેઓની પરસ્પરની વક્રતા એટલે ઝોકને समतल सीधी लीटी खूणो કહેવો.





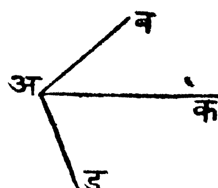
૮ મી વ્યાખ્યામાં કહેલો ખૂણો આ ભૂમિતિમાં વપરાતો નથી; અને ૯ મી વ્યાખ્યા પ્રમાણે સાધી લીટીઓથી થયલો ખૂણોજ વપરાયછે, માટે ઘણું કરીને એને માત્ર " ખૂણો " કરીનેજ

કહેવામાં આવેછે; અને "ખુણો" શબ્દ લખ્યો હોય ત્યારે હવેથી "સમતલ સાંધી લીટી ખુણો" સમજવો.



જે બે લીટીઓ મળવાથી એક ખુણો થાય તે લીટીઓને તે ખુણાની બાજુઓ કહેવી; જેમકે अ ખુણો છે; તેની अक અને अब બાજુઓ છે. એતો દેખીતુંજ છે કે એ બાજુઓ આ આકૃતિમાં છે તે કરતાં ગમે એટલી વધારે લાંબી અથવા ટુંકી દોરી હોય તો ખુણાના કદમાં કાંઈ ફેર પડનાર નથી; માટે યાદ રાખવું, કે લીટીઓ ન્હાની મ્હોટી હોય તે ઉપર ખુણાના પરિમિતનો આધાર નથી.

જે બિંદુએ બન્ને બાજુઓ મળેછે તેને ખુણાનું **શિરોબિંદુ** કહેછે, અને કોઈ કોઈ વાર તે બિંદુના નામથીજ ખુણો દેખાડાયછે; જેમકે अ ખુણો; પણ જો अ આગળ બેથી વધારે લીટીઓ મળે તો તો એકથી વધારે ખુણા થાય; જેમકે આ આકૃતિમાં अ બિંદુ આગળ ત્રણ ખુણા થયલાછે; (૧) अब અને अड લીટીઓ વચ્ચે; (૨) अब અને अक લીટીઓ વચ્ચે; અને (૩) अक અને अड લીટીઓ વચ્ચે; એમાંનો પહેલો ખુણો બીજા બેના સરવાળા બરોબર છે. હવે એ બધાને તો अ ખુણા કરીને કહેવાયજ નહિ; કારણ કે ત્રણે જુદા જુદા પરિમિતના છે, અને જુદી જુદી લીટીઓથી થયલા છે; માટે ખુણાઓ દેખાડવા સારૂ એવી ગોઠવણ કરી છે કે બે ખુણાઓ વચ્ચે ગુંચવણ પડે નહિ. તે એમ કે દરેક ખુણો એક અક્ષરથી નહિ પણ ત્રણ અક્ષરથી દેખાડવો; તેમાં શિરોબિંદુનો અક્ષર વચમાં મુકવો; અને આસપાસ બે બાજુઓ ઉપર લખેલા અક્ષરો મુકવા; જેમકે:—



(૧) अब અને अड વચ્ચેનો ખૂણો તે बअड અથવા डअब.
(૨) अब અને अक વચ્ચેનો ખૂણો તે बअक અથવા कअब.
(૩) अक અને अड વચ્ચેનો ખૂણો તે कअड અથવા डअक.

બે સીધી લીટીઓ એકજ સફાઈમાં હોય ને તેઓને લંબાવતાં તેઓ મળે તોઃ—

(૧) જો તેઓની દિશા એકજ હોય તો મળ્યા પછી બે મળીને એકજ લીટી થશે; પણઃ—

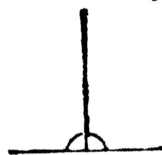
(૨) જો તેઓની દિશાઓ જુદી હોય તો જે બિંદુ આગળ મળે ત્યાં એકેકને છેદશે. એક વખત છેદ્યા પછી ફરીથી તો છેદશે નહિજ, એ તો પ્રત્યક્ષ છે. હવે જ્યાં છેદે છે ત્યાં તે બે લીટીઓ વચ્ચેની વક્રતા અથવા તેઓની વચ્ચેનો ઝોક અથવા ગાળો તેને ખૂણો કહેછે. આ ઉપરથી જણાશે કે બે સાધી લીટીઓ એકજ સફાઈમાં હોય પણ દૂર દૂર હોય તો તેમને લંબાવ્યા પછી એકેકને મળશે ત્યાં જે ખૂણો થાય તે તેઓની વચ્ચેનો ખૂણો સમજવો.

એવી બે લીટીઓ વચ્ચેનો ગાળો મ્હોટો ન્હાનો હોય તેમ ખૂણો પણ મ્હોટો ન્હાનો થશે; અને ખુણાના કદનો આધાર તે ઉપરજ રહેશે. બાજૂઓ ગમે એટલી લાંબી હોય પણ પાસે પાસે હોય તો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો ન્હાનો થશે; પણ બાજુઓ ગમે એટલી ન્હાની હોય, પણ તેમની વચ્ચેનો ગાળો મ્હોટો હોય, એટલે તે બાજૂઓ દૂર દર હોય, તો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો મ્હોટો થશે.

વ્યાખ્યા (૧૦-૧૨).

૧૦. જ્યારે એક સીધી લીટી બીજી સીધી લીટીને

એવી રીતે મળે કે પાસ પાસેના બે ખુણા-
ઓ બરોબર થાય, ત્યારે
આ ખુણાઓ માંહેલા
પ્રત્યેકને काटखुणो કહે-
છે; અને આ લીટીઓ
માંહેલી પ્રત્યેક બીજી ઉપર लंब છે એમ
કહેવાયછે.



૧૧. જે ખુણો કાટખુણા કરતાં
મ્હોટો તે पहोळो खुणो.

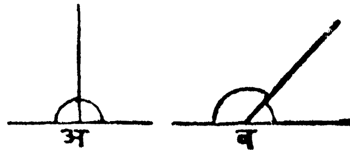


૧૨. જે ખુણો કાટખુણા કરતાં
ન્હાનો તે सांकडो खुणो.

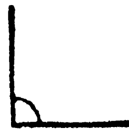


કોઈ ખુણો ન્હાનો હોય અને કોઈ મ્હોટો હોય, એટલે ખુણાના પરિમિતમાં ભાગો છે, એ તો દેખીતું છે; હવે વિચારવાનું એ રહ્યું કે એક ખુણો કેટલો મ્હોટો છે તે શી રીતે બતાવાય? એક લીટી કેટલી ન્હાની કે મ્હોટી છે તે તેમાં કેટલાં તસુ અથવા ફુટ અથવા ગજ છે તે કહ્યાથી સમજાશે; એક ચોપડી કેટલી ભારે છે તે કેટલા તોલા અથવા શેર છે તે કહ્યાથી સમજાશે. હવે ખુણાનું પરિમિત જાણવા સારૂ આપણે શું પરિમાણ લેવું જોઈએ? જો એક એવો ખુણો હોય કે તેનું પરિમિત હમેશાં નિશ્ચિત અને એકજ સરખું રહેતું હોય અને બદલાતું ન હોય (જેમકે લંબાઈમાં એક ફુટ, વજનમાં એક શેર) તો તેને અમુક નામ આપિયે; ને પછી બીજા બધા ખુણાઓનું તે ખુણા ઉપરથી પરિમિત કહાડીયે; એવો એક ખુણો સહે-

જમાં ધ્યાનમાં આવશે, તમારા ઓરડાની બે પાસપાસેની ઉભી દીવાલો વચ્ચેનો ખૂણો; તમારી ચોપડીની અથવા આ પૃષ્ઠની લંબાઈ અને પહોળાઈની વચ્ચેનો ખૂણો; ભીંત અને જમીન વચ્ચેનો ખૂણો; ભીંત અને 'સીલીંગ' (છત) વચ્ચેનો ખૂણો; સુથાર અથવા કડિયો લાકડાંની બે ચીપોથી બનાવેલો ખૂણો વાપરેછે તે; એ બધા ખૂણા એકજ પરિમિતના છે, એ તો સહેજ જણાશે. જો તમને એ વિશે શક હોય તો સ્લેટનો બે ચોકઠાં વચ્ચેનો ખૂણો ઓરડાની બે ભીંતો વચ્ચેના ખૂણા જોડે મેળવો; તો તમને જણાશે કે એ બન્ને ખૂણાઓ સ્થાનોપરી છે; એટલે એકેક ચોકઠું એકેક ભીંતની સાથે વળગી જશે; માટે ભીંતો અને ચોકઠાં વચ્ચેના (ગાળા) ખૂણા પણ સરખાજ હોવા જોઈએ. આવો નિશ્ચિત ખૂણો તે કાટખૂણો; એવા એક કાટ-ખૂણાના ૯૦ સરખા ભાગ કરિયે તો દરેક ભાગને એક અંશ કહેછે. જે વ્યાખ્યા ઉપર આપી છે તે આ પાસેની આકૃતિઓ જોતાં ખરી અને વાસ્તવિક છે એવું જણાશે. અ આકૃતિમાં બન્ને ખૂણા બરોબર છે અને દરેક ખૂણો દેખીતોજ કાટખૂણો છે; બ આકૃતીમાં ખૂણા ન્હાના મ્હોટા છે; અને તેમાંનો એકે કાટખૂણો નથી; દેખીતી રીતે એક કાટખૂણા કરતાં ન્હાનો, અને બીજો મ્હોટો છે.



(૧) કાટખૂણો હમેશાં એકજ નિશ્ચિત પરિમિતનો છે; માટે તેના એક સરખા ૯૦ ભાગ કીધાછે; એટલે દરેક કાટખૂણામાં ૯૦ અંશ હોવા જોઈએ.



(૨) પહોળો ખુણો કાટખુણા કરતાં મ્હોટો છે, માટે તેમાં ૯૦થી વધારે અને ૧૮૦થી ઓછા અંશ હોવા જોઈએ.

(૩) સાંકડો ખુણો કાટખુણા કરતાં ન્હાનો છે, માટે તેમાં ૦ થી વધારે અને ૯૦ થી ઓછા અંશ હોવા જોઈએ.

ટીપઃ—(૧) જે ખુણો કાટખુણો ન હોય તેને (એટલે પહોળા અને સાંકડા બન્ને ખુણાને) તિર્યક્કોણ કહેવો જેમકેઃ—

बअड અને डअइ એ બન્ને કાટખુણા છે; कअब, कअड એ બન્ને (સાંકડા) તિર્યક્કોણ છે; कअइ એ પણ (પહોળો) તિર્યક્કોણ છે.

(૨) બે કાટખુણા, એટલે ૧૮૦ અંશ, એથી વધારે પણ ખુણો થઈ શકે; પણ એવા ખુણા યુક્લિડના ગ્રન્થમાં વાપરવામાં આવ્યા નથી.

વ્યાખ્યા (૧૩—૧૪).

૧૩. કોઈ વસ્તુનો છેડો તે તેની સીમા અથવા मयादा.

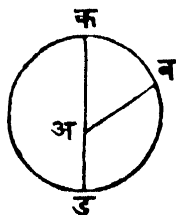
૧૪. જે સફાઈની એક અથવા વધારે લીટીઓથી હદ થઈ ગઈ હોય તે સફાઈને आकृति કહે છે.

વ્યાખ્યા ૧૩ મી ઘણી ઉપયોગી નથી.

જો સફાઈ અનન્ત ન હોય તો આકૃતિ થઈ.

એક આકૃતિને હદ કરનારી બધી લીટીઓની લંબાઈનો સરવાળો લઈયે તો તેને પરિમિતિ કહેછે.

વ્યાખ્યા (૧૫-૧૯).



૧૫. એક સપાટ આકૃતિ જેની હદ એકજ અખંડ વક્ર લીટીથી થયલી હોય અને જેમાં એક એવું મુકરર બિંદુ હોય કે તે બિંદુમાંથી તે વક્રલીટી સુધી જે સઘળી સીધી લીટીઓ દોરિયે, તે બરોબર થાય તો તે આકૃતિને એક वर्तुल કહેવો; અને તે વક્ર લીટીને परिघ કહેવો.

૧૬. જે બિંદુમાંથી આવી સરખી સીધી લીટીઓ દોરાયછે તેને તે વર્તુલનું मध्यबिंदु કહેછે.

૧૭. જે સીધી લીટી એક વર્તુલમાં તેના મધ્ય બિંદુમાં થઈને પાર જાય, અને જેના બે છેડાઓ પરિઘ ઉપરજ આવી મળે, તેને તે વર્તુલનો व्यास કહેછે.

૧૮. વ્યાસ અને તેનાથી કપાયલા પરિઘના ભાગ વચ્ચે વર્તુલનો જેટલો ભાગ આવે તેને अर्धवर्तुल કહેછે.

૧૯. હરકોઈ સીધી લીટી વર્તુલમાં દોરી હોય તો તે સીધી લીટી અને કપાયલા પરિઘ વચ્ચેના ભાગને વર્તુલનો खंड કહેછે.

ટીપઃ—મધ્ય બિંદુમાંથી જે સરખી સીધી લીટીઓ દોરી, તેને ત્રિજ્યા કહેછે.

(૧) એકજ વર્તુલની બધી ત્રિજ્યાઓ સરખી હોવી જોઈએ.

(૨) એકજ વર્તુલની ત્રિજ્યા તેના વ્યાસની અરધી હોવી જોઈએ.

(૩) એકજ વર્તુલના બધા વ્યાસો સરખા હોવા જોઈએ.

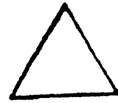
(૪) એક વ્યાસથી વર્તુલના બે સરખા ભાગ થઈ જાયછે; કારણ કે એવા બે ભાગ એકેક ઉપર ગોઠવીને મુકીશું તો સ્થાનો-પરી થશે; એટલે સરખીજ જગ્યા રોકશે; માટે દરેકને અર્ધ-વર્તુલ કહેછે.

વર્તુલની વ્યાખ્યા ઉપરથી વર્તુલ કેમ દોરવો તેની સમજ પડશે. એક દોરી લઈને તેનો એક છેડો પાટીયાં ઉપર આંગળીથી દબાવી રાખવો; પછી તે દોરી ખેંચીને તેને બીજે છેડે ચાકનો કટકો જોરમાં પકડી રાખવો; હવે જો પહેલો છેડો અચલ રાખીને એટલે દાબી રાખીને ચાકવાળો છેડો ફેરવીશું તો વર્તુલની આકૃતિ આવશે. એમાં દાબેલો છેડો તે મધ્ય બિંદુ, દોરીની લંબાઈ તે ત્રિજ્યા, અને ચાકની ગોળ લીટી તે પરિધ, અને એ લીટી વચ્ચે આવેલો પાટીયાંનો કાળો ભાગ તે વર્તુલ થયાં. (યાદ રાખવું કે પરિધ અને વર્તુલ જુદાં છે; પરિધ તો માત્ર એક લીટી; અને વર્તુલ તો લીટીથી મર્યાદા થયલી સફાઈ; ચાકની નિશાની તે પરિધ; અને પાટીયાંનો ભાગ તે વર્તુલ). ઉપલી આકૃતિમાં अ મધ્યબિંદુ છે; अब, अक, અને अड ત્રિજ્યાઓ, અને कड વ્યાસ છે; बकड લીટી પરિધ; અને તેની અંદરની સફાઈ તે વર્તુલ.

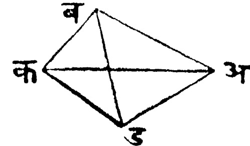
વ્યાખ્યા (૨૦—૨૩).

૨૦. જે આકૃતિની હદ માત્ર સીધી લીટીઓથી

થયલી હોયછે તેને सीधीलीटीआकृति કહેછે.



૨૧. જે સીધીલીટીઆકૃતિની હદ ત્રણ સીધી લીટીઓથી થઈ હોય તેને त्रिकोण કહેછે.



૨૨. જેની હદ ચાર સીધી લીટીઓથી થઈ હોય તેને चतुर्कोण કહેછે. ચતુર્કોણાકૃતિના સામસામેના ખુણાઓનાં શિરોબિંદુઓને સાંધનારી સીધી લીટીઓ (अक અને बड). ને તેની कर्ण लीटीओ કહેછે.



૨૩. જેની હદ ચારથી વધારે સીધી લીટીઓથી થઈ હોય તેને बहुकोण કહેછે.

જે સીધી લીટીઓથી એક સીધીલીટીઆકૃતિ થઈ હોય તે દરેક લીટીને તે આકૃતિની બાજૂ કહેછે. યાદ રાખવું કે એવી એક આકૃતિને જેટલી બાજૂઓ હોય તેટલાજ ખૂણા પણ હોવા જોઈએ.

ત્રણ કરતાં ઓછી સીધી લીટીઓથી કોઈ પણ આકૃતિ બની શકતી નથી: માટે બધી આકૃતિઓમાં ત્રિકોણ પહેલો અને બધાંનું મૂળ સમજવો. વળી કોઈપણ આકૃતિના ત્રિકોણ તુરત બની શકેછે; જેમકે ૨૨ મી વ્યાખ્યાની આકૃતિમાં એક ચતુર્કોણાકૃતિના બે ત્રિકોણો अबक અને अडक થયા; માટે ત્રિકોણના ગુણો વિશે સારૂં જ્ઞાન મળે તો તે ઉપરથી બીજી આકૃતિઓના ગુણોની સમજણ સારી મળે; પહેલા સ્કંધના ઘણા ખરા ભાગમાં ત્રિકોણના ગુણો વિશેજ વિચાર કીધેલો છે.

પાંચ બાજુના બહુકોણને પંચકોણ, છનાને ષટ્કોણ, સાતનાને સપ્તકોણ, આઠનાને અષ્ટકોણ ઇત્યાદિ કહેછે.

વ્યાખ્યા (૨૪—૨૯).

૨૪. જે ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ સરખી હોય તેને समबाजु त्रिकोण કહેછે.



૨૫. જે ત્રિકોણની માત્ર બેજ બાજુઓ સરખી હોય તેને समद्विबाजु त्रिकोण કહેછે.



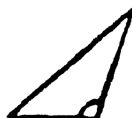
૨૬. જેની કોઈપણ બે બાજુઓ સરખી ન હોય તેને विषमबाजु त्रिकोण કહેછે.



૨૭. જે ત્રિકોણમાં એક કાટખૂણો હોય તેને काटखूण त्रिकोण કહેવો.



૨૮. જેમાં એક પહોળો ખૂણો હોય તેને पहोळखूण त्रिकोण કહેવો.



૨૯. જે ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણા સાંકડા હોય તેને सांकडखूण त्रिकोण કહેવો.



ઉપલી છ વ્યાખ્યાઓમાંથી પહેલી ત્રણ ત્રિકોણની બાજુઓ સરખાવતાં થઈછે; અને છેલ્લી ત્રણ ત્રિકોણના ખૂણાઓ સરખાવતાં થઈછે.

જેમ જે ત્રિકોણની ત્રણે બાજુઓ સરખી હોય તેને સમબાજુ કહેછે, તેમજ જેના ત્રણ ખૂણા સરખા હોય તેને સમખૂણ કહેછે. આગળ ચાલતાં જણાશે કે જે ત્રિકોણની ત્રણ

બાજૂઓ સરખી હોય તેના ત્રણ ખુણા પણ સરખા હોવાજ જોઈએ.

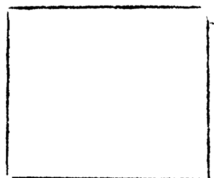
દેખીતું છે કે (૨૫) મી વ્યાખ્યામાં કહેલા ત્રિકોણના સઘળા ગુણો (૨૪) મી વ્યાખ્યાવાળા ત્રિકોણને લાગુ પડવાજ જોઈએ આગળ ચાલતાં જણાશે કે એક ત્રિકોણમાં કાટખૂણો એકજ હોઈ શકે, અને પહોળો ખૂણો પણ એકજ હોઈ શકે. જો બે કાટખુણા અથવા પહોળા ખુણા આવે એવો એક ત્રિકોણ દોરવા યત્ન કરશો તો તેમ દોરાશે નહિ.

યાદ રાખવું કે એક અથવા બે સાંકડા ખુણા કોઈ ત્રિકોણમાં હોય તો તેને સાંકડ ખુણ ત્રિકોણ કહેવાય નહિ. કારણ કે કાટખુણ અને પહોળખુણ ત્રિકોણોમાં પણ બે ખુણા તો સાંકડાજ આવેછે. માટે જે ત્રિકોણના ત્રણે ખુણા સાંકડા તેજ સાંકડખુણ ત્રિકોણ.

જો એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજૂઓ પોતપોતામાં સરખી ન હોય, પણ એકની ત્રણ બાજૂઓ અનુક્રમે બીજાની ત્રણ બાજુની બરોબર હોય તો તે બે ત્રિકોણો **અરસપરસ સમબાજૂ** છે એમ કહેવું.

વ્યાખ્યા. (૩૦–૩૪).

૩૦. ચતુર્કોણાકૃતિઓમાં જેની ચારે બાજૂઓ સરખી હોય અને બધા ખૂણાઓ કાટખૂણા હોય તેને ચોરસ કહેછે.



૩૧. જે ચતુર્કોણાકૃતિના બધા ખુણા કાટખુણા

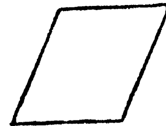
હોય પણ બધી બાજુઓ સરખી ન હોય તેને काटखूण चतुर्कोण કહેવો.



૩૨. જે ચતુર્કોણાકૃતિની બધી બાજુઓ સરખી હોય પણ તેના ખૂણા કાટખૂણા ન હોય તેને समबाजू चतुर्कोण કહેવો.



૩૩. જે ચતુર્કોણાકૃતિની સામસામેની બબે બાજુઓ સરખી હોય, પણ જેની ચારે બાજુઓ સરખી ન હોય અને જેના ખૂણાઓ પણ કાટખૂણા ન હોય તેને राम्बाइड કહે છે.



૩૪. બીજી બધી ચતુર્કોણાકૃતિઓને विषमबाजू चतुर्कोणो કહેવા.



ચોરસની વ્યાખ્યામાં એટલુંજ કહિયે તોપણ ચાલે, કે તેની ચારે બાજૂઓ સરખી હોવી જોઈએ, અને એક ખૂણો કાટખૂણો હોવો જોઈએ; કારણકે આગળ ચાલતાં જણાશે કે ચારે બાજૂઓ સરખી હોય અને એક ખૂણો કાટખૂણો હોય તો બીજા બધા પણ કાટખૂણાજ હોવા જોઈએ.

કાટખૂણ ચતુર્કોણના નામ ઉપરથીજ જણાશે કે તેમાં બધા ખૂણા કાટખૂણા હોવા જોઈએ; પણ બાજૂઓ અવશ્ય સરખીજ હોવી જરૂરની નથી.

તેજ પ્રમાણે સમબાજૂ ચતુર્કોણનો અર્થજ એ છે કે તે

ચતુર્કોણની ચારે બાજૂઓ સરખી છે; પણ તેના ખુણા બધા સરખા અથવા કાટખૂણા હોવાની જરૂર નથી.

રામ્બાઇડ શબ્દ ઇંગ્રેજી ઉપરથીજ લીધો છે; કારણ કે ફક્ત સામસામેની બેજ બાજૂઓ સરખી હોય એવી ચતુર્કોણાકૃતિને માટે એક શબ્દ આપણી ભાષામાં સહેલથી થઈ શકતો નથી. પણ એ આકૃતિ "સમાન્તરબાજૂ ચતુર્કોણ" જેની વ્યાખ્યા આગળ આપી છે, તેજ આકૃતિ છે; અને આગળ ચાલતાં સિદ્ધ થશે કે તે બે એકજ આકૃતિનાં નામો છે; માટે એ ઇંગ્રેજી શબ્દની જગ્યાએ તે શબ્દ બધે વાપરવામાં આવશે.

વ્યાખ્યા (૩૫–૩૬).

૩૫. જો એકજ સફાઈમાં બે સીધી લીટીઓ એવી હોય કે તેઓને બન્ને દિશાએ ગમે તેટલી વધારિયે તોપણ કદી મળે નહિ, તો તેને समान्तर સીધી લીટીઓ કહેવી.

૩૬. જે ચતુર્કોણાકૃતિની સામસામેની બબે બાજૂઓ સમાન્તર હોય તેને समान्तरबाजू चतुर्कोण કહેવો.



સમાન્તર લીટીઓ એકજ સફાઈમાં હોવી જોઈએ; કારણ કે બે જૂદી સફાઈમાં તો બે લીટીઓ એવી હોઈ શકે કે તે એકેકને મળેજ નહીં; પણ તે કાંઈ સમાન્તર ન કહેવાય. ૩૦-૩૧-૩૨-૩૩ વ્યાખ્યાવાળી આકૃતિઓનો સમાવેશ ૩૬ માં થયલો છે; એટલે ઉપર કહેલી બધી આકૃતિઓ સમાન્તરબાજૂ ચતુર્કોણ છે એમ સિદ્ધ થશે.

સ્વીકૃત કૃત્યો.

૧. એવું સ્વીકારેલું છે, કે કોઈ પણ એક બિંદુથી કોઈપણ બીજા બિંદુ સુધી એક સીધી લીટી દોરી શકાય છે.

૨. એવું સ્વીકારેલું છે, કે અન્તવાન સીધી લીટી ગમે તેટલી લંબાઈ સુધી એક સીધી લીટીમાં વધારી શકાય છે.

૩. એવું સ્વીકારેલું છે, કે કોઈપણ બિંદુને મધ્યબિંદુ ધારીને તે મધ્ય બિંદુથી કોઈપણ અન્તરે એક વર્તુલ દોરી શકાય છે.

સમજણ.

આ વિષયની બરોબર સમજણ પહેલાંથીજ લેવી ઘણી અગત્યની છે; માટે માત્ર એ ત્રણ સ્વીકૃત કૃત્યો મ્હોડે કરવાથી કામ થયું એમ વિદ્યાર્થીએ જાણવું નહિ; પણ આ સમજણ જરા કઠણ લાગે તોપણ ધ્યાનથી સમજ્યા શિવાય આગળ વધવું નહિ. એ બરોબર સમજ પડવા માટે નીચલા સવાલોનો વિચાર કરવાનો છે.

(૧) સ્વીકૃત કૃત્યો એટલે શું? અને એમ સ્વીકારવાનું કારણ શું?

(૨) યુક્લિડે માત્ર કેટલું સ્વીકારવા માગ્યું છે?

(૩) એ ત્રણ શિવાય કોઈ કૃત્યો સ્વીકારાયલાં છે કે કેમ? એ સવાલોના જવાબઃ—

(૧) વિદ્યાર્થીને આગળથી ખબર તો હશેજ કે બે હજારથી વધારે વર્ષો થયાં યુક્લિડની ભૂમિતિનો આગ્રહપૂર્વક અભ્યાસ

એટલામાટે કરવામાં આવેછે કે એજ એકલા શાસ્ત્રમાં તર્કશાસ્ત્રના નિયમોને બરોબર દૃઢતાથી અનુસરવામાં આવેછે, અને સિદ્ધાંતો એવી રીતે સાબિત કરવામાં આવ્યાછે કે આગલા એકાદ સિદ્ધાંતમાં ન સાબિત કર્યું હોય એવું કોઈપણ સિદ્ધાંતમાં સ્વીકારવામાં આવતું નથી. હવે ત્રણ કૃત્યો એવાં છે કે તે માગી લીધેલાં છે; અને તે જો આપણે ન સ્વીકારિયે તો સિદ્ધાંતોનો પુરાવો આપી શકાય નહિ. એ ત્રણ કૃત્યો તેજ ઉપર લખેલાં ત્રણ સ્વીકૃત કૃત્યો છે. એ એટલાં સહેલાં છે કે તુરતજ સ્વીકારી શકાય.

(૨) એ કૃત્યો બરોબર તપાસવાં જોઈએ; અને જેટલું માગેલું છે તેટલુંજ આપવું; તેથી વધારેની જરૂર નથી. પહેલાંમાં એમ માગેલું છે કે બે બિંદુઓ એકજ સક્ષામાં હોય તો એક બિંદુથી બીજા સુધી લીટી દોરવાની એટલે કે તે બિંદુઓને એક લીટીથી સાંધવાની છુટ છે; જો अ અને ब

अ•———————•ब બે બિંદુઓ હોય તો જરૂર પડે તેઓની વચ્ચે अ થી ब સુધી એક લીટી દોરી શકાય, એટલું માગી લીધું છે. બીજાં સ્વીકારાયલાં કૃત્યમાં એમ કહેલું છે કે જો જરૂર પડે તો એક આપેલી હદ થયલી अब લીટી બેમાંથી ગમેતે —— अ —— ब —— બાજૂએ લંબાવાઈ શકાય. પણ યાદ રાખવું કે આપણે એમ સ્વીકારતા નથી કે આટલી અમુક લંબાઈ સુધી લંબાવાય; એમ ન કહેવાય કે अब લીટીને ચાર ઈંચ લંબાવો; અથવા કોઈ कड લીટી જેટલી લંબાવો. એ આપણે સ્વીકારતા નથી; પણ એટલુંજ, કે अब લીટી સમર્યાદ એટલે બન્ને છેડે હદ થયલી લીટી છે તેને એક અથવા બન્ને દિશાએ અમર્યાદ કરી શકાય. પહેલાં અને બીજાં સ્વીકૃત કૃત્યો કયા સાધનથી થઈ શકે તે જોવાથી વધારે સમજ પડશે.

એ બન્ને સાધારણ વગર નિશાની કરેલી આંકણીથી થઈ શકે: એક એવી આંકણીથી બે બિંદુ પણ સંધાઈ શકે અને એક લીટી ઉપર આંકણી મુકીને કલમ ચલાવિયે તો બન્ને બાજુએ તે લીટી લંબાવાઈ પણ શકાય. ઉપર "વગર નિશાની કરેલી" એવા શબ્દો વાપરવાનું કારણ એ કે એક નિશાની કરેલો ફુટ અથવા ગજ લઈએ તો લીટી દોરાય અને લંબાવાય એટલુંજ નહિ, પણ અમુક લંબાઈ જેટલી પણ કરી શકાય. પણ તેવું કાંઈ યુક્લિડે પોતાની ભૂમિતિના સિદ્ધાંતોના પુરાવા માટે માગ્યું નથી. ત્રિજામાં એટલુંજ માગી લીધુંછે કે એક આપેલી લીટીના એક છેડાને મધ્યબિંદુ ધારીને અને તે લીટીને ત્રિજ્યા ધારીને એક વર્તુલ દોરી શકાય. આ આકૃતિ બનાવવા સારૂ એક **કમ્પાસ** (કંકટ)ની જરૂર છે. પહેલાં કમ્પાસનું એક અણી મધ્ય બિંદુ ઉપર મૂકીને અચલ રાખવું, પછી બીજું અણી આપેલી લીટીને બીજે છેડે મૂકીને તે અણી ફેરવવું; તે અણી ફરીને પાછું અસલ જગ્યાએ આવશે કે બરાબર વર્તુલાકૃતિ થઈ રહેશે. યાદ રાખવું કે યુક્લિડે એમ માગ્યું નથી કે ત્રિજ્યા અમુક લંબાઈ (પાંચ ઇંચ, દશ ઇંચ)-ની હોવી જોઈએ; પણ એટલુંજ કે એક આપેલી લીટીને ગમે તે એક છેડો મધ્ય બિંદુ માટે લેવો; અને તેજ લીટીની લંબાઈ તે ત્રિજ્યા. યાદ રાખવું કે સાદી આંકણીથી પણ કોઈ અમુક લંબાઈ જેટલી લીટી દોરી શકાય અને સાધારણ કમ્પાસથી પણ કોઈ અમુક ત્રિજ્યાનો વર્તુલ દોરી શકાય, પણ તેવી રીતે એ સાધનો વાપરવાની જરૂર નથી, કારણ કે તેટલું કાંઈ યુક્લિડે પુરાવા માટે માગ્યું નથી.

(૩) જે ત્રણ કૃત્યો સ્વીકારાયાં છે તે ઉપરાંત બીજાં પણ એક બે એવાં કૃત્યો સ્વીકૃત હોય એમ યુક્લિડે ગણ્યાં છે. તે એણે આ ભેગાં લખ્યાં નથી તેના બે કારણો હશે; એક તો એ કે તે

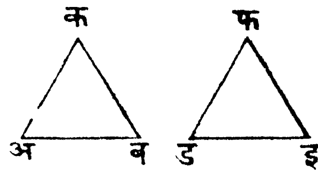
ક્વચિતજ વપરાયછે; બીજું એકે તે એટલાં સ્પષ્ટ છે, કે તે માગી લેવાની જરૂર જણાઈ નહિ હોય. પણ તેવાં કોઈ ઠેકાણે આવે ત્યારે ગુંચવણ પડે નહિ અને વળી તે શું છે તે આગળથી જણાય, માટે તે અહિયાં આપ્યાં છે. તે સમજવાં સહેલ છે.

૧. કોઈપણ સફાઈમાં એક બિંદુ ગમે ત્યાં લેવું હોય તો લઈ શકાય.

૨. બે લીટીઓ હોય તો તેમાંની એક લીટી ઉંચકીને બીજી લીટી ઉપર એવી રીતે મુકી શકાય કે એક લીટીનો એક છેડો બીજી લીટીના એક છેડા સાથે મળી જાય, અને ઉંચકેલી લીટી બીજી લીટીના ઉપર એવી રીતે પડે કે તેને ઢાંકી નાખે.

૩. એક ખુણો ઉંચકીને બીજા ઉપર એવી રીતે મુકી શકાય કે એકનું શિરોબિંદુ બીજાના શિરોબિંદુ ઉપર પડે અને ઉંચકેલા ખુણાની એક બાજુ પડેલા ખુણાની એક બાજુને ઢાંકી નાખે.

એક આકૃતિને ઉંચકીને બીજી ઉપર એવી રીતે મુકી શકાય કે એકનું એક બિંદુ બીજીના એક બિંદુ ઉપર પડે અને એ બન્ને બિંદુઓમાંથી નિકળતી લીટીઓ એકેકના ઉપર પડે. જેમકે अबक અને डइफ બે



ત્રિકોણ છે; તેમાં अबक ને ઉંચકીને डइफ ઉપર એવી રીતે મુકો કે अ બિંદુ ड ઉપર પડે, અને अब લીટી डइ લીટી ઉપર પડે. (પહેલા સ્કંધના ચોથા સિદ્ધાંતમાં આ કૃત્ય વાપરેલું છે).

પ્રત્યક્ષપ્રમાણો.

૧. જે પરિમિતો એકજ પરિમિતની બરોબર છે, તેઓ અરસપરસ બરોબર છે.

૨. જો સમપરિમિતોની સાથે સમપરિમિતો મેળવિયે, તો સર્વાળા સમ થશે.

૩. જો સમપરિમિતોમાંથી સમપરિમિતો બાદ કરિયે તો બાકી સમ રહેશે.

૪. જો વિષમ પરિમિતોની સાથે સમપરિમિતો મેળવિયે તો સર્વાળા વિષમથશે.

૫. જો વિષમ પરિમિતોમાંથી સમપરિમિતો બાદ કરિયે તો બાકી વિષમ રહેશે.

૬. એકજ અથવા બરોબર પરિમિતોની બમણાઈ બરોબર છે.

૭. એકજ અથવા બરોબર પરિમિતોના અર્ધા બરોબર છે.

૮. જે પરિમિતો એકેક ઉપર મૂકતાં અરસપરસ મળી જાયછે અથવા અવકાશમાં એકજ જગ્યામાં બરોબર માઈ રહેછે તેઓ બરોબર છે.

૯. આખું તેના ભાગ કરતાં મ્હોટું છે.

૧૦. બે સીધી લીટીઓ અવકાશ ઘેરી શકતી નથી.

૧૧. સઘળા કાટખૂણા બરાબર છે.

૧૨. જો એક સીધી લીટી બે બીજી સીધી લીટીઓને એવી રીતે મળે કે તેની એક બાજુના બે માંહેલા ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં ઓછો થાય તો જે

બાજૂભણી બે કાટખૂણા કરતાં ઓછા સર્વાળાવાળા ખૂણા છે તે બાજૂભણી એ બે લીટીઓને વધાર્યા કરી હોય તો તેઓ મળશે.

સમજણ.

આપણે ઉપર સ્વીકૃત કૃત્યોની સમજણમાં કહી ગયા છિયે કે યુક્લિડે સિદ્ધાંતોની સાબિતીમાં પુરાવાના કઠિન નિયમોને એવા દૃઢપણે સ્વીકારેલા છે કે આગલા સિદ્ધાંતમાં ખાત્રીપૂર્વક સાબિત ન થઈ હોય એવી કોઈપણ હકીકત ત્યારપછીના સિદ્ધાંતમાં સ્વીકારવામાં આવતી નથી. હવે કેટલાંક પ્રમાણો એવાં દેખીતી રીતે સત્ય છે કે તેમની સત્યતા સાબિત કરવા માટે વધારે સહેલાં પ્રમાણો મળી શકતાં નથી; જેમકે अ નું વજન बના વજન બરોબર છે; અને क નું વજન પણ बની બરોબર છે; તો अનું વજન कની બરોબર થશે. આ પ્રમાણ પ્રત્યક્ષ એટલે વગર સાબિતીએ ખઙ્ગ છે, એમાં કાંઈ શક નથી. માટે "પ્રત્યક્ષપ્રમાણ" નો અર્થતો આ ઉદાહરણ ઉપરથી સમજાયો હશે.

ભૂમિતિવિદ્યાનો આધાર થોડાંક આવાં પ્રત્યક્ષપ્રમાણો જેની સત્યતા દેખીતીજ છે તેનાં ઉપર રહેલો છે.

પ્રત્યક્ષપ્રમાણોમાં તર્કશાસ્ત્રના નિયમો પ્રમાણે નીચેનાં ત્રણ લક્ષણો આવશ્યક હોવાં જોઈએ.

(૧) તેની સત્યતા દેખીતીજ હોવી જોઈએ.

(૨) તેની સત્યતાનો આધાર તેના કરતાં કોઈ વધારે સહેલી સત્યતા ઉપર રહેલો જોઈએ નહિ.

(૩) બીજી પ્રતિજ્ઞાઓની સત્યતાનો પુરાવો તેનાથી મળી શકે.

આ ઉપરથી પ્રત્યક્ષપ્રમાણની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે આપી શકાય.

પ્રત્યક્ષપ્રમાણ એક દેખીતી સત્યતા છે જે સિદ્ધતાથી સ્થાપન થઈ શકતી નથી અને જેને તેમ સ્થાપવાની જરૂર પણ નથી અને જેમાંથી બીજી પ્રતિજ્ઞાઓની સત્યતા સ્થપાયછે.

ઉપર આપેલાં બાર પ્રત્યક્ષપ્રમાણોના બે ભાગ એવી રીતે થઈ શકેછે કે, (૧) કેટલાંક સાધારણ એટલે જૂદી જૂદી વિદ્યાઓમાં સામાન્ય રીતે લાગુ પડી શકેછે, અને (૨) બાકીનાં ખાસ ભૂમિતિનાં પરિમિતોનેજ લાગુ પડી શકેછે. પહેલાં સાત તથા નવમું સાધારણ રીતે હમેશાં ખરાંજ છે; એક આખી વસ્તુ તેના એક ભાગ કરતાં મ્હોટી હોવીજ જોઈએ; બે વસ્તુઓ એકજ વસ્તુથી બમણી હોય તો તેઓ બરોબર હોવી જોઈએ; ઇત્યાદિ. બાકીનાં પ્રત્યક્ષપ્રમાણો ભૂમિતિનાં પરિમિતોનેજ લાગુ પડી શકેછે.

બધાં પ્રત્યક્ષપ્રમાણો તપાસી જોવાથી જણાશે કે ઘણાં ખરાં તુરતજ સમજી શકાય અને જેની સત્યતા નિઃસંશય છે એવાં છે; પણ મુખ્ય કરી છેલ્લું એવા પ્રકારનું છે કે તેની સમજ તુરત પડી શકતી નથી. આ ઉપરથી એમ નહિ ધારવું કે એ પ્રત્યક્ષપ્રમાણ નથી; કારણ કે એમાં શું કહેલું છે તે બરોબર જાણીને બે લીટીઓ દોરશો તો સ્પષ્ટ રીતે તે બે લીટીઓ મળવીજ જોઈએ. એ હવેની ટીકાઓ વાંચવાથી જણાશે. પણ યાદ રાખવું કે ઉપર કહેલાં પહેલા વર્ગનાં સાધારણ પ્ર૦પ્ર૦ સામાન્ય રીતે ખરાં છે, તોપણ ભૂમિતિમાં તો એ પ્રમાણે લીટી, સફાઈ, અવકાશ, વગેરેનેજ લાગુ પડેછે. બે ચોપડીઓ એકેકની બરોબર તો વજન, કિમ્મત, રંગ, વગેરે અનેક

પ્રકારે હોઈ શકે, પણ ભૂમિતિમાં તો એમજ સમજવું કે "તે-
ઓ અવકાશમાં એક સરખી જગ્યા ઘેરેછે."

ટીપ.—પહેલા પ્રત્યક્ષપ્રમાણ ઉપરથી નીચેના ઉપસિદ્ધાંતો
નિકળેછેઃ—

(૧) જો अ પદાર્થ ब ની બરોબર હોય, અને क, ड ની બ-
રોબર હોય, અને જો अ અને क બરોબર હોય તો ब અને ड
બરોબર થશે.

(૨) જો કેટલાક પદાર્થો અનુક્રમે હોય તેમાં પહેલો બીજા
બરોબર, બીજો ત્રીજા બરોબર, ઇત્યાદિ તો તેમાંના કોઈપણ
બે પદાર્થો એકેકની બરોબર થશે.

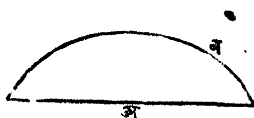
(૩) જો બે પદાર્થો બરોબર હોય, પણ તેમાંનો એક કોઈ
ત્રીજા કરતાં મ્હોટો હોય તો તેમાંનો બીજો પણ તે ત્રીજા કરતાં
મ્હોટો થશે.

છઠ્ઠામાં બે ભાગ છે ; એકજ પદાર્થનાં બમણાં સરખાં હોવાં
જોઈએ, તેમજ બે સરખા પદાર્થનાં બમણાં પણ સરખાંજ.
એ પ્ર૦ પ્ર૦ બીજાં પ્રમાણમાંથી પણ સહજ સિદ્ધ થઈ શકેછે.

સાતમાને પણ છઠ્ઠાની માફકજ સમજવું.

આઠમા પ્ર૦ પ્ર૦ ની સમજણ બરોબર પડવી જોઈએ. (૧)
ઉપર સ્વીકૃત કૃત્યોની સમજણમાં આપણે કહ્યું છે તેમ જો
એક લીટી ઉંચકીને બીજી લીટી ઉપર એવી રીતે મૂકિયે કે
એકનો એક છેડો (બિંદુ) બીજીના એક છેડા ઉપર પડે,
અને તે લીટીઓની દિશા પણ સરખીજ હોય, અને જો તેમ
કરતાં એવું બને કે બીજો છેડો પણ બીજા છેડા સાથેજ
બરોબર મળી જાય, તો સ્પષ્ટ છે કે તે બે લીટીઓ સરખીજ
હોવી જોઈએ; (૨) તેમજ જો એક ખૂણો બીજા ખૂણા ઉપર

એવી રીતે મુકિયે કે એકનું શિરોબિંદુ બીજાના શિરોબિંદુ ઉપર પડે, અને બન્નેની એકેકી બાજૂ એકેકના ઉપર એકજ દિશાએ પડે, અને જો તેમ કરતાં તે ઉપરાંત એવું બને કે બાકી રહેલી બે બાજૂમાંથી પણ એક બીજીને ઢાંકી નાખે તો સ્પષ્ટ છે કે તે બે ખૂણા સરખાજ હોવા જોઇએ; (યાદ રાખવું કે દરેક બબે બાજૂઓની માત્ર દિશા એકજ હોવી જોઇએ; તેમની લંબાઇ સરખી હોવી જરૂરની નથી).
(૩) તેમજ એક આકૃતિ ઉચકીને બીજી ઉપર એવી રીતે મુકી શકિયે કે એક આકૃતિની બધી બાજૂઓ બીજીની બધી બાજૂઓને બરોબર ઢાંકી નાખે તો સ્પષ્ટ છે કે બધી બાજૂઓ અને તેમની વચ્ચેના બધા ખુણાઓ સરખાજ હોવા જોઇએ; અને એક આકૃતિ પણ બીજીની બરોબરજ હોવી જોઇએ.



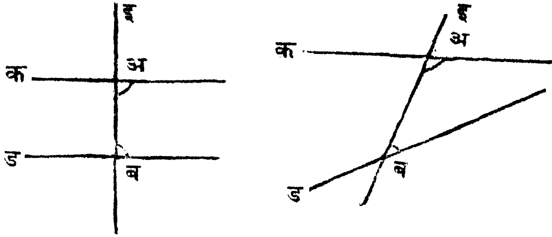
દશમા પ્ર૦ પ્ર૦ વિશે થોડોક વિચાર જરૂરનો છે. આકૃતિમાંની બે લીટીઓથી અવકાશ (જગ્યા) ઘેરાયછે; પણ તે કાંઇ સીધી લીટીઓ નથી; એમાં ब લીટી વક્રરેષા છે; જો બન્ને લીટીઓ આ પ્રમાણે સીધીજ દોરીશું તો હદ થયલી આકૃતિ અથવા સફાઇ થનાર નથી.



અગીઆરમું પ્ર૦ પ્ર૦ સમજવા માટે ગમે તે બે કાટખૂણા લઇને સ્થાનોપરી કરી જોવાથી સરખાજ છે એમ ખાત્રી થશે.

બારમું પ્ર૦ પ્ર૦ બરોબર સમજવું આરંભમાં કઠિન છે; અને

પહેલા સ્કંધનો ૨૮ મો સિદ્ધાંત જાણ્યા પહેલાં એની બરોબર સમજણ મળવી મુશ્કિલ છે; પણ આ બે આકૃતિઓ



ઉપરથી જરૂરજેટલી સમજણ તુરત મળી શકશે. પહેલી આકૃતિમાં क અને ड લીટીઓ ઉપર इ લીટી ઉભી પડેછે, અને તેથી अ અને ब ખૂણો દરેક દેખીતી રીતે એક કાટખૂણો છે; માટે તે બે મળીને બે કાટખૂણા થયા. એ આકૃતિમાં क અને ड લીટી સમાન્તર લાગેછે. (યાદ રાખવું કે એનો એક સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવાનો છે; અને તે આગળ જતાં સિદ્ધ થશે; માત્ર પ્રમાણ કેવું છે તેનો વિચાર આપવાનાજ હિતથી આ આકૃતિઓ દોરી છે). હવે બીજી આકૃતિમાં अ અને ब ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા કરતાં (પહેલી આકૃતિ સાથે સરખાવતાં) ઓછા દેખાયછે; તો क અને ड લીટીની સમાન્તરતા પણ નિકળી ગયલી તુરત દેખાયછે; એ બે લીટીઓ તો જે બાજૂએ अ અને ब ખૂણા આવ્યા તે બાજૂએ લંબાવીશું તો મળવાનીજ.

પ્રાસ્તાવિક પ્રકરણ.

એકજ સફાઈ ઉપર જે લીટીઓ અને આકૃતિઓ દોરી શકાય તેમના લક્ષણોનું વર્ણન યુક્લિડની ભૂમિતિમાં કીધું છે. પહેલા છ સ્કંધોમાં માત્ર સીધી લીટી, અને સીધીલીટી આકૃતિઓ, અને વર્તુલને લગતુંજ વર્ણન છે.

વ્યાખ્યા, સ્વીકૃત કૃત્યો અને પ્રત્યક્ષપ્રમાણો શું તે તો આપણે જોયું. ફરીથી યાદ લાવવા સારૂ કહેવું જોઈએ કે જે પારિભાષિક શબ્દો ભૂમિતિમાં વાપરવામાં આવ્યા હોય તે શબ્દોનો ખરો અર્થ બતાવવો તે તે શબ્દની **વ્યાખ્યા**. સિદ્ધાંતો સાબિત કરવા માટે ત્રણ સહેલાં કૃત્યો કરવાની જરૂર છે, જે વિના તેની સાબિતી થઈ શકે નહિ, અને જે પહેલાંથી માગી લીધેલાં છે તે ત્રણ કૃત્યો સ્વીકૃત કહેવાયછે. કેટલાંક પ્રમાણો એટલાં દેખીતાં છે કે તેમને વધારે સહેલાં પ્રમાણોથી સાબિત કરવાં અશક્ય છે; તેવાં પ્રમાણોને **પ્રત્યક્ષપ્રમાણો** કહેવાં. આ પ્રમાણે ભૂમિતિની ભાષાના ખાસ શબ્દોનો અર્થ સમજ્યા પછી, અને ત્રણ સ્વીકૃત કૃત્યો અને બાર પ્રત્યક્ષપ્રમાણોનો આધાર લઈને, સિદ્ધાંતો સિદ્ધ કરવાને આપણે તૈયાર છિયે.

ઉપર કહેલા, લીટી, આકૃતિ વગેરેના ગુણો યુક્લિડ કેટલાક સિદ્ધાંતોથી સાબિત કરી આપેછે; તે એવી રીતે કે એક સિદ્ધાંતમાં ખાત્રીથી સાબિત કરી ગયા તેને ત્યાર પછીના હરકોઈ સિદ્ધાંતમાં ખરૂં છે એમ માનવું; ને આગળ વધવું અને નવા નવા સિદ્ધાંતો શોધતા અને સાબિત કરતા જવું. આવી રીતે તર્ક કીધાથી જે પરિણામો નિકળે તેને સિદ્ધાંત કહેછે. દરેક સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવા પહેલાં તેમાં શું સિદ્ધ કરવું છે અથવા શું કાર્ય કરવું છે તે આપણી સામે પહેલાં નિશ્ચિત અને સાફ

શબ્દોમાં મૂકવું જોઇયે; એ પ્રમાણે સિદ્ધાંતને મથાળે પહેલે તેની પ્રતિજ્ઞા આવેછે. ભૂમિતિની પ્રતિજ્ઞાઓ બે પ્રકારની છે; (૧) कृत्यो અને (૨) प्रमेयो. કોઈ વેળાએ પ્રતિજ્ઞામાં કાંઈ **કરવાનું** કહેલું છે; જેમકે, એક આપેલી લીટી ઉપર એક સમબાજુ ત્રિકોણ દોરવાનો; અથવા એક ત્રિકોણ એવો બનાવવો કે તેની ત્રણ બાજૂઓ ત્રણ આપેલી સીધી લીટીઓની બરાબર હોય; ઇત્યાદિ. આવા સિદ્ધાંતને कृत्य કહેછે. એથી ઉલટું કોઈ વેળાએ કાંઈ તત્ત્વની સત્યતા બતાવવાની હોયછે; જેમકે, એવું સાબિત કરો કે કોઈ પણ ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા જેટલાજ થશે; અથવા એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજૂઓ સરખી હોય તો તેના ત્રણે ખૂણા પણ સરખાજ હોવા જોઈએ; ઇત્યાદિ. આવા પ્રકારના સિદ્ધાંતને प्रमेय કહેછે. હવે એ બન્ને પ્રકારના સિદ્ધાંતો સિદ્ધ કરવા માટે પહેલાં તો પ્રતિજ્ઞા લખીને તે પ્રમાણે એક આકૃતિ દોરીને શું **આપેલું** છે અને શું **માગેલું** અથવા **કરવાનું** છે તે કહેવું જોઈએ. ત્યાર પછી માગેલું પરિણામ બરોબર મળેછે કે નહિ તે તપાસવાને આકૃતિ સંપૂર્ણ કરવી, એટલે જરૂર પ્રમાણે લીટીઓ લંબાવવી, અથવા બિંદુઓ સાંધવાં; અથવા વર્તુલો દોરવા, વગેરે કૃત્યો કરવાં તેનું નામ रचना; ત્યાર પછી જે માગ્યું હોય તે બનાવવાનું અથવા તેની સત્યતા આગલા સિદ્ધાંતોની મદદ વગેરેથી બતાવી આપવાનું કામ રહ્યું, તેને सिद्धता કહેછે. સિદ્ધાંતોને અનુક્રમે નંબરો હોયછે. માટે હવે સિદ્ધાંતની ગોઠવણ કેવી હોયછે તેનો વિચાર આવી શકશે.

(૧) સિદ્ધાંત (નમ્બર). (૨) કૃત્ય કે પ્રમેય?

(૩) પ્રતિજ્ઞા.

(૪) પ્રતિજ્ઞા પ્રમાણે આકૃતિ.

(૫) રચના.

(૬) શું સિદ્ધ કરવું છે તે પ્રસિદ્ધ કરવું.

(૭) સિદ્ધતા અથવા પુરાવો.

(૮) સિદ્ધતા ઉપરથી શું સાબિત થયું તે.

એ પ્રમાણે ૮ ભાગ થયા. દરેક સિદ્ધાંતમાં એ આઠ ભાગ જૂદા લખવા જોઈએ; પણ તેમ કરતાં લંબાણ થઈ જવાને લીધે (૪), (૬) અને (૮) અવશ્ય પુરાવામાં તો આવેછેજ, પણ તેમનાં જૂદાં મથાળાં લખાતાં નથી. તે શિવાયનાં મથાળાં બધી સિદ્ધતાઓમાં લખવાં જરૂરનાં છે. એક કૃત્ય અથવા પ્રમેય પુરૂં થયું કે તેની નીચે "આજ કૃત્ય કરવાનું હતું" અથવા "આજ પ્રમેય સિદ્ધ કરવાનું હતું" એવા શબ્દો લખવાનો ધારો છે. માટે આ વાક્યોમાં સંસ્કૃત ભાષાંતરો સંક્ષેપમાં લખવાં. પહેલાંને માટે कृत्यं कृतं (સંક્ષેપમાં कृ. कृ.) અને બીજાને માટે प्रमेयं सिद्धं (સંક્ષેપમાં प्र. सि.)

ઘણી વેળાએ સિદ્ધાંતની પ્રતિજ્ઞામાં જે બાબદ આપેલી અથવા સ્વીકારેલીજ હોય તે પુરાવા માટે વાપરવી પડેછે; ત્યારે તે બાબદ લખીને તેની પાસે કૌંસમાં (પ્રતિ૦) લખવામાં આવેછે; તેનો અર્થ એમ કે, એ વાત તો પ્રતિજ્ઞામાં કબુલ કીધેલી છેજ.

તેજ પ્રમાણે કોઈ પણ સિદ્ધાંતની સાબિતોમાં જે જે આપણે આગળ શીખી ગયા તેનો આધાર લેવાની હરકત નથી. પણ તે આધાર શાથી મળ્યો તે ટુંકામાં ખાત્રીને માટે પાસે લખવો જરૂરનો છે. જેમકે રચના કરતાં બે બિંદુઓ સાંધ્યાં

તો તુરત તેની પાસે (સ્વી. ૧) લખવું; એટલે તેથી સમજાયું કે આ કૃત્ય આપણે પહેલા નમ્બરના સ્વીકૃત કૃત્યને આધારે કીધું. એજ પ્રમાણે વળી એક સિદ્ધાંતમાં તેની આગળના સિદ્ધાંતનો આધાર લીધો હોય તો તે પણ એમજ લખાયછે. ધારો કે ત્રીજા સ્કંધના ૩૧મા સિદ્ધાંતમાં પહેલા સ્કંધની ૧૫મી વ્યાખ્યાની જરૂર પડી; તો તે (૧. વ્યા. ૧૫) કરી લખવું; અને ત્રીજા સ્કંધના ૨૨મા સિદ્ધાંતનો આધાર લીધો તો (૩. ૨૨) કરી લખવું. એ વગેરે માટે નીચે આપેલા સંક્ષેપ ધ્યાનમાં રાખવાઃ—

(૧. વ્યા. ૫) એટલે પહેલા સ્કંધની પાંચમી વ્યાખ્યા.

(સ્વી. ૩) એટલે ત્રીજું સ્વીકૃત કૃત્ય (એ કૃત્યો માત્ર પહેલાજ સ્કંધમાં છે).

(પ્ર. પ્ર. ૭) એટલે સાતમા પ્રત્યક્ષ પ્રમાણથી; (એ પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો માત્ર પહેલાજ સ્કંધમાં છે).

(૧. ૫) એટલે પહેલા સ્કંધના પાંચમા સિદ્ધાંત પ્રમાણે.

(૨. ૭) ,, બીજા ,, સાતમા ,, ,,

(પ્રતિ.) ,, જે સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવો છે તેજ સિદ્ધાંતની પ્રતિજ્ઞાને આધારે.

(રચ.) એટલે તેજ સિદ્ધાંતની રચના કીધી છે તેને આધારે.

ઉપલા સંક્ષેપો દરેક સિદ્ધાંતમાં વપરાયછે; તે ઉપરાંત નીચેના સંક્ષેપો પણ કોઈવેળા વપરાયછે.

∵ કારણ કે, ∴ માટે,

= બરોબર, ∠ ખુણો, |__ કાટખુણો.

△ ત્રિકોણ, ∥ અથવા = સમાન્તર સીધી લીટીઓ.

⊥ લંબ, ⊙ વર્તુલ, સી૦ લી૦ સીધી લીટી, ચો૦ ચોરસ.

એક સિદ્ધાંત સિદ્ધ થવાથી બીજી કોઈ સત્યતા તુરતજ તે ઉપરથી ઉત્પન્ન થતી હોય, તો તેવી આધાર રાખતી સત્યતાને **ઉપસિદ્ધાંત** કહેછે. એવા ઉપસિદ્ધાંતો કોઈ વખતે તેમની પછીના સિદ્ધાંતોમાં પુરાવા એટલે આધાર માટે કામ પણ આવેછે; એવા ઉપસિદ્ધાંતો તેઓના સિદ્ધાંતને છેડે લખવામાં આવેછે અને તેમ લખ્યા હોય તોજ આધાર માટે લેવાયછે જેમકે (૨. ૪ ઉપ.) એટલે "બીજા સ્કંધના ૪થા સિદ્ધાંતને છેડે આપેલા ઉપસિદ્ધાંતને આધારે" એમ સમજવું.

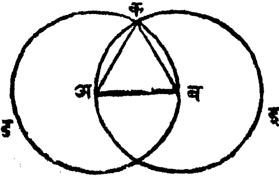
કોઈકોઈ સિદ્ધાંતની નીચે સમજણ સહેલ કરવા માટે અથવા અગત્યની સૂચના માટે ટીપ આપી છે, તે છોડી ન દેતાં સરખાજ ધ્યાનથી ગ્રહણ કરવી.

દરેક સિદ્ધાંત નીચે પ્રશ્નો આપ્યા છે, તે બનતાં સુધી સહેલા અને તુરત થાય એવા નવા સિદ્ધાંતો છે; તે તંક મળે કરવાથી આ વિદ્યાનું વધારે મજબુત જ્ઞાન સમ્પાદન થશે; અને વિદ્યાર્થીની બુદ્ધીની કસોટી થઈ પડશે એટલુંજ નહિ, પણ જે ચોપડીમાંના સિદ્ધાંતો છે તે વધારે મજબુતીથી મન ઉપર ઠસશે. બનતાં સુધી શિક્ષકે એ પ્રશ્નો ઘેરથી ટુંકી રીતે લખી મંગાવવા.

સિદ્ધાંત ૧. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક આપેલી અન્તવાન સીધી લીટી ઉપર એક સમબાજૂ ત્રિકોણ કહાડવો.

સાધન.



ધારો કે अब આપેલી સીધી લીટી છે; તે अ અને ब બન્ને તરફથી હદ થયલી છે, તેના ઉપર એક સમબાજૂ ત્રિકોણ કહાડવાનો છે.

રચના.

अ મદ્યબિંદુ લઈને અને अब જેટલો અન્તર એટલે ત્રિજ્યા, લઈને એક बकड વર્તુલ દોરો (સ્વી. ૩).

ब મદ્યબિંદુ લઈને અને बअ ત્રિજ્યા લઈને अकइ વર્તુલ દોરો. (સ્વી. ૩).

આ બે વર્તુલો એકેકને બે બિંદુમાં છેદે છે, તેમાંના એક क બિંદુમાંથી, अ અને ब બિંદુઓ સૂધી બે સીધી લીટીઓ कअ અને कब દોરો. (સ્વી. ૧).

ત્યારે अबक માગેલો સમબાજૂ ત્રિકોણ થશે.

સિદ્ધતા.

अ બિંદુ बकड વર્તુલનું મદ્યબિંદુ છે; માટે अक સીધી લીટી अब સીધી લીટીની બરોબર છે. (વ્યા. ૧૫).

અને વળી अकड वર્તુલનું મધ્યબિંદુ ब છે,

માટે बक લીટી बअ ની બરોબર છે. (વ્યા. ૧૫).

પણ ઉપર બતાવ્યું છે કે अब તો अकની બરોબર છે;

માટે अक અને बक દરેક अबની બરોબર છે.

પણ જે પરિમિતો એકજ પરિમિતની બરોબર છે તેઓ અરસ્પરસ બરોબર હોવાં જોઈએ. (પ્ર. પ્ર. ૧).

માટે अक લીટી बकની બરોબર છે;

માટે कअ, अब અને बक ત્રણે અરસ્પરસ સરખી છે;

એટલે अबक ત્રિકોણ સમબાજુ છે; અને તે વળી આપેલી લીટી अबના ઉપર કહાડ્યો છે. कृ. कृ.

પ્રશ્નો.

(૧) ઉપલી આકૃતિમાં જે બીજા બિંદુમાં બન્ને વર્તુલો એકેકને છેદેછે તે બિંદુ આપેલી લીટીના છેડા સાથે જોડતાં માગ્યા પ્રમાણેનો એક બીજો ત્રિકોણ થશે.

(૨) ઉપલી સિદ્ધતા સંક્ષેપમાં લખો.

अबक ⊙ નું મધ્યબિંદુ अ છે,

∴ अब=अक (વ્યા. ૧૫).

તેમજ बअ=बक ,,

∴ अब=अक=बक (પ્ર.પ્ર. ૧).

∴ अबक સમબાજૂ △ अब લીટી ઉપર થયો.

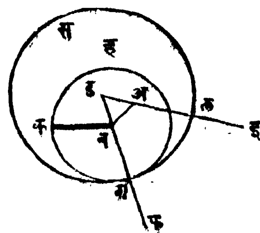
(૩) એક સમર્યાદ સીધી લીટી ઉપર ફક્ત કેટલા સમબાજૂ ત્રિકોણો દોરી શકાય તે આકૃતિરચના ઉપરથી કહો.

સિદ્ધાંત ૨. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક આપેલા બિંદુમાંથી એક એવી સીધી લીટી દોરવી કે તે એક આપેલી સીધી લીટીની બરોબર થાય.

સાધન.

ધારો કે अ આપેલું બિંદુ છે; અને बक આપેલી લીટી છે; તો अ બિંદુમાંથી એક લીટી बकની બરોબર દોરવી છે.



રચના.

अથી ब સુધી अब લીટી દોરો. (સ્વી. ૧)

અને अब ઉપર એક સમબાજુ ત્રિકોણ अबड કહાડો. (૧. ૧)

डअ અને डब સીધી લીટીઓને इ અને फ સુધી લંબાવો. (સ્વી. ૨)

ब મધ્યબિંદુ લઈને, અને बक ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુલ कगह દોરો; (સ્વી. ૩)

ધારો કે તે डफ ને ग બિંદુમાં છેદે છે. અને ड મધ્યબિંદુ લઈને, डग ત્રિજ્યાએ गसल વર્તુલ દોરો (સ્વી. ૩) જે अइ ને ल બિંદુમાં છેદે છે.

ત્યારે अल લીટી માગ્યા પ્રમાણે बकની બરોબર થશે.

સિદ્ધતા.

ब બિંદુ कगह વર્તુલનું મધ્યબિંદુ છે.

માટે बक લીટી बगની બરોબર છે (વ્યા. ૧૫)

અને ड બિંદુ गसल વર્તુલનું મધ્યબિંદુ છે,

માટે डल લીટી डगની બરોબર છે. (વ્યા. ૧૫)

પણ डल નો એક ભાગ डअ તે डग ના એક ભાગ डब ની બરોબર છે. (૧. ૧.)

માટે સરખા ભાગો બાદ કરતાં, બાકીનો ભાગ अल તે બાકીનો ભાગ बग ની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૩);

પણ ઉપર બતાવ્યું કે बक પણ बग ની બરોબર છે;

માટે अल અને बक દરેક बग ની બરોબર છે.

પણ જે પરિમિતો એકજ પરિમિતની બરોબર છે તે અરસ્પરસ બરોબરજ હોવાં જોઈએ.

માટે अल સીધી લીટી बक ની બરોબર છે.(પ્ર.પ્ર.૧)

એટલે આપેલા अ બિંદુમાંથી अल લીટી આપેલી સીધી લીટી बक ની બરોબર માગ્યા પ્રમાણે દોરાઈ. कृ. कृ.

સૂચનાઃ—આકૃતિ બરોબર દોરવા માટે વિદ્યાર્થીએ પહેલા મ્હોટો વર્તુલ દોરવો; પછી તેમાં ન્હાનો વર્તુલ એવી રીતે દોરવો કે બન્નેનાં નીચેનાં બિંદુએ અરસ્પરસ અડકી રહે; ને પછી પછવાડેથી માંહેની લીટીએ દોરવી; ફકત સારી આકૃતિ દોરવા માટે આ સૂચના કીધી છે. રચના લખવી તે તો સિદ્ધાંતમાં કહ્યા પ્રમાણેજ.

ટીપ (૧) આ સિદ્ધાંતની રચના કઠિન છે; અને એટલી ભારી રચનાવાળા સિદ્ધાંતો પહેલા સ્કંધમાં થોડાજ છે; માટે આકૃતિ બરોબર રચવી જરૂરની છે; તે માટે નીચે લખેલી બાબદો ધ્યાનમાં રાખવીઃ—

(૧) આપેલા બિંદુને આપેલી લીટીના નજદીકના છેડા સાથે સાંધવું.

(૨) પછી એ સાંધનારી લીટી ઉપર એક સમબાજુ ત્રિકોણ દોરવો.

(૩) પછી તે ત્રિકોણની ઉપલી બે બાજુએા દૂર સુધી લંબાવવી.

(૪) પછી આપેલી લીટીના સાંધેલા છેડાને મધ્યબિંદુ લઇને, અને આપેલી લીટીનેજ અન્તર એટલે ત્રિજ્યા ગણીને પહેલો (ન્હાનો) વર્તુલ દોરવો.

(૫) આ વર્તુલ લંબાવેલી બન્ને બાજુએાને છેદશેજ.

(૬) ત્રિકોણના છેક ઉંચા શિરોબિંદુને મધ્યબિંદુ લઇને ત્યાંથી તે છેક આપેલી લીટીના છેડાની પાર જઇને જે બિંદુમાં પહેલો વર્તુલ લીટીને છેદેછે ત્યાંસુધીની ત્રિજ્યા લઇને મ્હોટો વર્તુલ દોરવો.

(૨) આપેલું બિંદુ આપેલી લીટીના બેમાંથી ગમે તે છેડા સાથે સાંધવું, અને સાંધનારી લીટી ઉપરનો ત્રિકોણ લીટીની ઉપર અથવા હેઠળ ગમે તેમ દોરવો. બધી એટલે ચારે રીતે માગેલી લીટી મળી આવશે. વિદ્યાર્થીએ એ ચારે આકૃતિએા દોરીને તપાસવી.

(૩) યાદ રાખવું કે જો કમ્પાસે વતી લીટીની લંબાઇ ભરવાની છુટ હત તો આ સિદ્ધાંત કરવાની જરૂર ન હતી પણ યુક્લિડે તે વાત સ્વીકારી નથી.

પ્રશ્ન.

(૧) એક આપેલા બિંદુમાંથી એક આપેલી અમર્યાદ સીધી લીટીને મળે એવી એક આપેલી લંબાઇની લીટી દોરો.

(૨) આપેલું બિંદુ આપેલી લીટીમાંજ હોય તો ઉપલો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૩) તેમજ આપેલું બિંદુ આપેલી લીટીનો એક છેડો હોય તો.

(૪) એક આપેલી લીટી ઉપર એવો એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કહાડો કે જેની સરખી બાજુઓ એક આપેલી સીધી લીટીની બરોબર હોય.

(૫) એક આપેલી લીટી ઉપર એવો એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ કહાડો કે તેની બે સરખી બાજુઓ તેના પાયા કરતાં બેવડી હોય.

(૬) જો अब=चक તો ड બિંદુ ન્હાના વર્તુલના પરિઘ ઉપર પડશે.

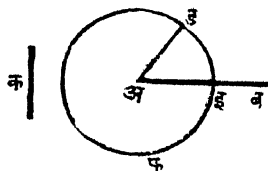
સિદ્ધાંત ૩. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—બે આપેલી સીધી લીટીઓમાંની મ્હોટી-માંથી ન્હાની લીટી બરોબર એક ભાગ કાપવો.

સાધન.

ધારો કે अब અને क બે આપેલી સીધી લીટીઓ છે; જેમાં अब મ્હોટી છે.

अब લીટીમાંથી એક ભાગ क લીટી જેટલો કાપવો છે.



રચના.

अ બિંદુમાંથી એક अड લીટી क લીટીની બરોબર દોરો (૧. ૨)

પછી अ મધ્યબિંદુ લઈને, અને अड ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુલ ड इ फ દોરો; ધારો કે તે વર્તુલ अब લીટીને इ બિંદુમાં છેદેછે.

તો अइ ભાગ માગવા પ્રમાણેનો થશે.

સિદ્ધતા.

ड इ फ વર્તુલનું अ મધ્યબિંદુ છે;
માટે अइ લીટી अड ની બરાબર છે. (વ્યા. ૧૫)
પણ अड તો क લીટીની બરાબર છે. (રચના)
માટે अइ અને क દરેક अड ની બરોબર છે.
માટે अइ લીટી क ની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧)
અને તે આપેલી મ્હોટી લીટીમાંથી આપેલી ન્હાની લીટી બરાબર કાપી. कृ. कृ.

પ્રશ્ન.

(૧) બે આપેલી લીટીના સરવાળા બરોબર એક લીટી દોરો.

(૨) બે આપેલી લીટીની બાદબાકી બરોબર એક લીટી દોરો.

(૩) એક ન્હાની આપેલી લીટીને લંબાવીને મ્હોટી આપેલી લીટી બરોબર દોરો.

સિદ્ધાંત ૪ ની સમજણ.

ચોથો સિદ્ધાંત ઘણો અગત્યનો છે; અને એમાં જે પુરાવો વાપરવામાં આવ્યો છે તે નવીન તરેહનો છે, માટે તે વિશે આ ટીપ પહેલાંથી વાંચવાથી ફાયદો થશે.

કોઈ પણ એક ત્રિકોણમાં છ પરિમિતો હોયછે; ત્રણ બાજૂ અને ત્રણ ખૂણા; હવે જો બે આપેલા ત્રિકોણોમાં બાજૂ કરીને

ઉપલાં છમાંનાં ત્રણ પરિમિતો સરખાં આપ્યાં હોય તો બાકીનાં ત્રણ સરખાં થશે; અને ત્રિકોણ આખા પણ એકેકને સરખા થશે. એવી રીતે બે ત્રિકોણોની સરખાઈ સ્થાપવાને પહેલા સ્કંધમાં ત્રણ સિદ્ધાંતો સિદ્ધ કીધા છે. તેમાંનો પહેલો આ છે, બીજા નમ્બર ૮ અને ૨૬ છે. આ સિદ્ધાંતમાં એમ આપેલું છે કે એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓ જૂદી જૂદી બીજા ત્રિકોણની બે બાજૂઓની બરોબર છે; અને ત્રીજું એ કે તે બબે બાજૂઓની વચ્ચે આવેલા ખૂણા પણ બન્ને ત્રિકોણોમાં સરખા છે; તો સિદ્ધ કરવું કે તે ત્રિકોણોનાં બાકીનાં પરિમિતો પણ સરખાંજ થશે; અને બન્ને ત્રિકોણો પણ સરખાજ થશે.

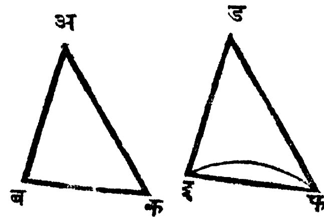
સિદ્ધતા સ્થાનોપરી કરવાથી થશે. એ વિશે વ્યાખ્યા ૧૦–૧૨ની સમજણમાં લખ્યું છે તે તથા સ્વીકૃત કૃત્યોની સમજણમાં જે છેલ્લે કહ્યું છે તે બરોબર ધ્યાનમાં લેવું. પુરાવામાં એક ત્રિકોણ ઉંચકીને બીજા ઉપર મુકીને પછી સિદ્ધ કરેછે કે તે બન્ને એકેક ઉપર બરોબર પડી જાયછે. માટે તેઓ સરખા હોવા જોઈએ.

સિદ્ધાંત ૪. પ્રમેય.

વ્યાખ્યાઃ—જો એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની બે બાજૂઓની બરોબર હોય, અને વળી તે સરખી બાજૂઓની વચ્ચે આવેલા અન્તર્ખૂણાઓ પણ બરોબર હોય તો (૧) તે ત્રિકોણોના પાયા એટલે બાકીની બાજૂઓ બરોબર થશે. (૨) બાકી રહેલા ખૂણાઓમાંથી જે ખૂણાઓ સરખી બાજૂઓની સામેના છે તેઓ અરસ્પરસ બરોબર થશે અને (૩) તે ત્રિકોણો પણ એકેકની બરોબર થશે.

સાધન.

ધારોકે अबक અને डइफ બે આપેલા ત્રિકોણો છે; જેમાં अब બાજુ डइ ની બરોબર છે, अक બાજુ डफની બરોબર છે અને અન્તર્ખૂણો बअक તે इडफ અન્તર્ખૂણાની બરોબર છે તો સિદ્ધ કરવાનું કે (૧) बक બાજુ इफની બરોબર થશે; અને (૨) अक બાજૂની સામેનો ખૂણો अबक તે डफ બાજૂની સામેના ખૂણા डइफની બરોબર થશે, અને अबની સામેનો ખૂણો अकब તે डइ ની સામેના ખૂણા डफइ ની બરોબર થશે, અને (૩) अबक ત્રિકોણ डइफ ત્રિકોણની બરોબર થશે.



સિદ્ધતા.

કારણ કે જો अबक ત્રિકોણ ઉંચકીને डइफ ત્રિકોણ ઉપર મૂકિયે એવી રીતે કે अ બિંદુ ड બિંદુ ઉપર પડે અને अब લીટી डइ લીટીની દિશામાં હોય, તો ब બિંદુ इ બિંદુ ઉપરજ પડવું જોઇએ.

કારણ કે अब લીટી डइ ની બરોબર છે. (પ્રતિજ્ઞા)

હવે अब લીટી डइ ઉપર બરોબર પડી રહે છે તો अक લીટી इफ ના ઉપર તેજ દિશાએ પડવી જોઇએ;

કારણ કે बअक ખૂણો इडफ ખૂણાની બરોબર છે.(પ્ર.)

જો એમ ન પડે તો તો अ અને ड ખૂણા ન્હાના મ્હોટા થાય.

વળી अ બિંદુ ड ઉપર પડેછે અને अक તથા डफ લીટી-ઓની દિશા એકજ છે, તો क બિંદુ फ ઉપર પડવુંજ જોઇયે.

કારણ કે अक લીટી डफની બરોબર છે (પ્રતિ.).

આપણે જોયું કે ब બિંદુ इ ઉપર પડેછે.

અને क બિંદુ फ ઉપર પડેછે,

તો તેમની વચ્ચે આવેલી बक લીટી इफ ઉપર પડવીજ જોઇયે; કેમકે જો તેમ ન પડે અને આકૃતિમાં બતાવ્યા પ્રમાણે એ ચારમાંના બબે બિંદુઓ મળવા છતાં એકેક ઉપર ન પડે તો તો બે સીધી લીટીઓ અવકાશ ઘેરે; પણ એ તો અશક્ય છે; (પ્ર. પ્ર. ૧૦)

માટે बक લીટી इफ ના ઉપરજ પડવી જોઇયે અને તેઓના છેડા તો એકજ બિંદુમાં આવી રહેલા છે.

માટે (૧) बक લીટી इफની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૮)

વળી अबक ત્રિકોણના ब અને क ખુણા પણ डइफ ત્રિકોણના इ અને फ ખુણા ઉપરજ પડેછે,

માટે (૨) अबक ખૂણો डइफ ખૂણાની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૮)

અને अकब ખૂણો डफइ ખૂણાની બરોબર છે.

(૩) વળી આખો अबक ત્રિકોણ डइफ ત્રિકોણ ઉપર બરોબર પડી રહેછે;

માટે अबक ત્રિકોણ પણ डइफ ત્રિકોણની બરોબર છે. (પ્ર.પ્ર.૮)

માટે, જો એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓ ઇ૦.

प्र. सि.

ટીપઃ—(૧) આ સિદ્ધાંત પ્રમેય છે; પહેલા ત્રણ કૃત્ય હતા. એમાં કાંઈ બનાવવાનું નથી; પણ જો એક ત્રિકોણનાં ત્રણ આપેલાં પરિમિતો બીજાનાં ત્રણની બરોબર હોય, તો તે ત્રિકોણો બધી રીતે સરખા થશે એવું સિદ્ધ કરવાનું છે.

(૨) યુક્લિડે સ્વીકૃત કૃત્યોમાં સ્થાનોપરી કરવાનું સ્વીકાર્યું તો નથી માટે ત્રિકોણો એકેક ઉપર મૂકી શકાય એવું કલ્પનાથીજ વિચારવાનું છે, તોપણ શિક્ષક બે ત્રિકોણો કાગળ ૪૦ ના લઈને એકેક ઉપર શિરોબિંદુ વગેરે મૂકીને બનાવશે તો આ સિદ્ધાંત સહેલથી સમજાશે.

પ્રશ્નો.

(૧) જો अक=डइ હોય, અને बक=डफ હોય, તો કયા ખૂણા સરખા આપેલા હોવા જોઈએ; અને કયા ખૂણા સરખા થશે, તે સિદ્ધ કરો.

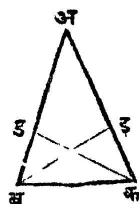
(૨) એક ચોરસની કર્ણ ખૂણાઓને તથા ચોરસને દ્વિભાજે છે.

(૩) એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુને દ્વિભાગનાર લીટી પાયાને મળે તો તે પાયાને દ્વિભાગશે; અને પાયા ઉપર લંબ થશે.

(૪) જો अबक ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોય તો ઉપર પ્રમાણેની સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરો કે ब અને क ખૂણા સરખા થશે.

સિદ્ધાંત ૫માની સમજણ.

પાંચમો સિદ્ધાંત ઘણું કરીને આરંભ કરનારાઓને કઠિન લાગેછે, માટે આ નીચે આપેલો સિદ્ધાંત જે ચોથાનોજ એક જૂદો આકાર છે તે પહેલે જોવાથી પાંચમો કદાચ વધારે સહેલાઈથી સમજાશે.



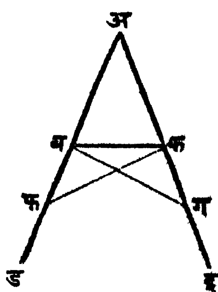
એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ अबक ની अब અને अक સમબાજૂઓમાં ड અને इ એવાં બિંદુઓ લીધાં છે કે अड=अइ છે; અને बइ તથા डक બિંદુઓ જોડયાં; તો बइ લીટી डकની બરોબર થશે.

કારણ अडक અને अबइ ત્રિકોણમાં अड=अइ છે; અને अब=अक છે. (પ્રતિ૦) એકની બે બાજૂઓ अड અને अक બીજાની બે બાજૂઓ अइ અને अब ની બરોબર છે; અને તેમનો અન્તર્ખૂણો તો એકને એક अ છે એટલે સરખોજ છે. ∴ એ બે ત્રિકોણો સરખા થયા; અને डक લીટી बइની બરોબર થઈ.

સિદ્ધાંત ૫. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણની બરોબર બાજૂની સામેના (એટલે પાયા ઉપરના) ખૂણાઓ બરોબર છે; અને તે સમબાજૂઓને લંબાવિયે તો પાયાની બીજી બાજૂએ ખૂણા થશે તે પણ (એકેકની) બરોબરજ થશે.

સાધન.



ધારો કે अबक એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ છે; જેની अब બાજૂ अक બાજૂની બરોબર છે; ધારો કે તે સરખી બાજૂઓ ड અને इ બિંદુઓ સૂધી વધારી તો अबक ખૂણો अकब ખૂણાની બરોબર થશે; અને कबड ખૂણો बकइ ખૂણાની બરોબર થશે.

રચના.

बड લીટીમાં એક फ બિંદુ લો;

અને આખી अइ લીટીમાંથી એક अग ભાગ, अफ લીટીની બરોબર કાપો. (૧. ૩)

फ,क અને ब,ग બિંદુઓ સાંધો. (સ્વી. ૧)

સિદ્ધતા.

फअक અને गअब ત્રિકોણોમાં,

फअ લીટી गअની બરોબર છે, (રચના)

અને अक લીટી अबની બરોબર છે, (પ્રતિ.)

માટે એક ત્રિકોણની फअ, अक લીટીઓ બીજા ત્રિકોણની गअ, अब લીટીઓની બરોબર છે,

અને અન્તર્ખૂણા બંને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે.

માટે फअक ત્રિકોણ गअब ત્રિકોણની બરોબર છે. (૧.૪)

એટલે फक લીટી गब ની બરોબર છે.

અને अकफ ખૂણો अबग ખૂણાની બરોબર છે,

અને अफक ખૂણો अगब ખૂણાની બરોબર છે.

વળી, આખી अफ લીટી अगની બરોબર છે. (રચ.)

તેમાં अब અને अक બરોબર આપેલી છે, (પ્રતિ.)

માટે બાકીનો ભાગ बफ તે બાકીના ભાગ कग ની બરોબર થવો જોઈએ. (પ્ર. પ્ર. ૩)

ત્યારે, बफक, कगब ત્રિકોણોમાં, बफ લીટી कगની બરોબર છે, (સિદ્ધતા)

અને फक લીટી गब ની બરોબર છે. (સિદ્ધતા)

અને અન્તર્ખૂણો बफक અને कगब બરોબર છે, (સિદ્ધતા)

માટે बफक અને कगब ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે.

અને फबक ખૂણો गकब ખૂણા બરોબર છે,

અને बकफ ખૂણો कबग ખૂણા બરાબર છે (૧.૮)

પણ ઉપર બતાવ્યું છે કે આખો अबग,

આખા ખૂણા अकफ ની બરોબર છે.

અને હમણાં સિદ્ધ કીધું કે તેમના ભાગો कबग અને बकफ સરખા છે.

માટે બાકીનો ખૂણો अबक બાકીના ખૂણા अकब ની બરોબર થયો. (પ્ર. પ્ર. ૩)

અને એ अबक ત્રિકોણના પાયા ઉપરનાજ ખૂણા છે.

વળી, ઉપર બતાવી ગયા કે फबक અને गकब ખૂણા પણ બરોબર છે;

અને તે પાયાની બીજી બાજુના ખૂણા છે.

માટે આપણે સિદ્ધ કીધું કે એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણમાં ઇ૦. प्र. सि.

ઉપસિદ્ધાંતઃ—જો એક ત્રિકોણ સમબાજૂ હોય તો તેના ખૂણા પણ સમ હોવા જોઇયે.

પ્રશ્નો.

(૧) સમબાજૂ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા બરોબર છે.

(૨) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજૂએ બે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ अबक અને डबक છે; જેમાંનો બીજો

ત્રિકોણ પેહેલાની અંદર પડેછે, તો બતાવો કે अबड ખૂણો =अकड ખૂણો.

(૩) ઉપલોજ પ્રશ્ન બે સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણો પાયાની જૂદી જૂદી બાજૂએ લઈને સાબિત કરો.

(૪) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજૂએ બે સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણો કહાડ્યા હોય તો બતાવો કે એકનું શિરોબિંદુ બીજા ત્રિકોણની કોઈપણ બાજૂના ઉપર પડી શકે નહિ.

(૫) ઉપલો સિદ્ધાંત ઘણી સહેલાઈથી ૪ થા સિદ્ધાંતના ૪ થા પ્રશ્નની સહાયથી થઈ શકેછે, તે બતાવો.

(૬) એજ સિદ્ધાંત સમબાજૂઓ ન વધારતાં, તે બાજૂઓમાં ड અને इ બિંદુઓ अ થી સરખે અન્તરે લઈને સિદ્ધ કરો.

સિદ્ધાંત ૬ઠ્ઠાની સમજણ.

જો બે પ્રમેયોમાં એકનું પક્ષ બીજાનું સાધ્ય હોય અને પેહેલાનું સાધ્ય બીજાનું પક્ષ હોય તો તે બે પ્રમેયો એકેકના **વ્યત્યાસ** કહેવાય; વ્યત્યાસ એટલે ઉલટા; પાંચમો સિદ્ધાંત અને છઠ્ઠો વ્યત્યાસ છે એમ તેમની પ્રતિજ્ઞાઓ જોવાથી જણાશે; એટલે પાંચમાનું પક્ષ (કર્તા, અથવા આપેલું) તે છઠ્ઠાનું સાધ્ય (ક્રિયાપદ, માગેલું) છે, અને પાંચમાનું સાધ્ય છઠ્ઠાનું પક્ષ છે.

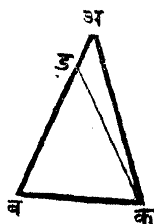
છઠ્ઠો સિદ્ધાંત **ઉલટ પક્ષનો** છે, માટે તેની સિદ્ધતા પણ, ઉલટી રીતની છે; યુક્લિડની ભુમિતિમાં ઘણીવેળા એ વ્યત્યાસ સિદ્ધાંતો ઉલટ સિદ્ધતાથીજ સાબિત કર્યા છે. **સુલટી** સિદ્ધતાના દાખલાતો આપણે ઉપર જોયા; હવે ઉલટી સિદ્ધતા કેવા પ્રકારની છે તે જોવાનું રહ્યું; ધારો કે એમ સાબિત કરવું છે કે अ

ચોપડી ब કરતાં મ્હોટી છે; તો જો આપણે સિદ્ધ કરિયે કે अ અને ब બરોબર હોઈ નજ શકે; તેમજ अ ચોપડી ब કરતાં ન્હાની પણ હોઈ નજ શકે; તો સ્પષ્ટ છે કે अ ચોપડી ब કરતાં મ્હોટી હોવીજ જોઈયે. તેમજ ધારો કે अ ખૂણો ब ની બરોબર છે એવું સિદ્ધ કરવું છે; તો પહેલાં એવું સિદ્ધ કરી બતાવિયે કે જો अ ખૂણો ब કરતાં મ્હોટો હોય તો કંઈ સ્પષ્ટ અસંભાવ્યતા નિકળે; તેમજ अ, ब કરતાં ન્હાનો હોય તો પણ તેવીજ સ્પષ્ટ અસંભાવ્યતા નિકળે. ત્યારે નક્કીજ સિદ્ધ થયું કે अ અને ब બરોબરજ હોવા જોઈયે. આ જાતનો પુરાવો કદાચ શરૂઆતમાં ગુંચવણ જેવો અથવા અનિશ્ચિત જેવો લાગશે; પણ વિચાર કરતાં જણાશે કે એમાં કંઈ અનિશ્ચિત-પણું નથી. સુલટા પુરાવા જેટલોજ એ મજબૂત પુરાવો છે. તોપણ જ્યાં સુધી સુલટો પુરાવો મળી આવેછે ત્યાં સુધી એવો પુરાવો વપરાતો નથી.

સિદ્ધાંત ૬. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ બરોબર હોય, તો તેઓની સામેની બાજૂઓ પણ બરોબર છે.

સાધન.



अबक ત્રિકોણનો अकब ખૂણો अबक ખૂણાની બરોબર છે; તો अब બાજૂ अक બાજૂની બરોબર થશે.

રચના.

જો अब, अक ની બરોબર ન હોય તો એ બેમાંની એક બાજૂ બીજી કરતાં મ્હોટી હોવી જોઈયે.

જો એમ બની શકે, તો ધારો કે
अब બાજૂ अक કરતાં મ્હોટી છે.
તો अब માંથી बड ભાગ अक જેટલો કાપો. (૧.૩).
क, ड બિંદુઓ સાંધો.

સિદ્ધતા.

डबक અને अबक ત્રિકોણોમાં,
डब લીટી अक ની બરોબર છે. (રચ.)
અને बक લીટી બન્ને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે,
અને डबक ખુણો अकब ખુણાની બરોબર છે. (પ્રતિ.)
માટે એક ત્રિકોણની डब, बक બાજૂઓ અને અન્તર્ખુણો डबक બીજાની अक, कब બાજૂઓ અને અન્તર્ખુણો अकब ની બરોબર અનુક્રમે છે.
માટે डबक ત્રિકોણ अकब ની બરોબર થયો; (૧.૪)
આખો પોતાના ભાગની બરોબર;
એ અશકય છે. (પ્ર. પ્ર.૯)
માટે આપણે अब બાજૂ अक કરતાં મ્હોટી ધારી એ ખોટું;
તેમજ अक બાજૂ अब કરતાં મ્હોટી હોય એ અશકય છે એમ સિદ્ધ કરી શકીશું.
માટે अब બાજૂ अक કરતાં મ્હોટી પણ નથી અને ન્હાની પણ નથી.
એટલે अब બાજુ अक ની બરોબર છે.
માટે જો એક ત્રિકોણના બે ખુણાઓ ૯૦ प. सि.

ઉપસિદ્ધાંતઃ—જો ત્રિકોણ સમકોણ હોય તો તે સમબાજુ છે.

ટીપઃ—રચનામાં अब મ્હોટીમાંથી अक ન્હાની બરોબરનો ભાગ કાપ્યો, તે ક્યા છેડાથી अ થી કે ब થી તે યાદ રાખવું.

પ્રશ્નો.

(૧) આ સિદ્ધાંતમાં કેવા પ્રકારની સિદ્ધતા વાપરી છે? તેનું કારણ શું?

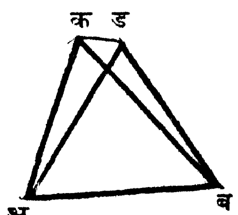
(૨) સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયા ઉપરના ખુણાઓને દ્વિભાગનારી લીટીઓથી જે બીજો ત્રિકોણ તેજ પાયા ઉપર થશે, તે પણ સમદ્વિબાજુ થશે.

સિદ્ધાંત ૭. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ દિશાએ બે એવા ત્રિકોણો થઈ શકે નહિ કે જેઓની તે પાયાના એક છેડામાં મળતી બે બાજુઓ એકેકને સરખીજ હોય, અને વળી એકી વખતે બીજા છેડામાં મળતી બે બાજુઓ પણ એકેકને સરખીજ હોય.

સાધન.

જો એમ બની શકતું હોય તો એકજ પાયા अब ઉપર, અને તેની એકજ બાજુએ બે ત્રિકોણો अकब અને अडब એવા દોરો કે પાયાના अ બિંદુમાં આવી મળતી તેઓની अक અને अड બાજુઓ એકેકની બરોબર થાય,



અને વળી ब બિંદુમાં મળતી बक અને बड બાજુઓ પણ એકેકની બરોબરજ થાય.

પહેલું—એમ ધારો કે દરેક ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ બીજા ત્રિકોણની બહાર પડે છે; તો क,ड બિંદુઓ સાંધો (સ્વી. ૧)

સિદ્ધતા.

अकड ત્રિકોણમાં, अक બાજુ अडની બરોબર છે. (પ્રતિ.)

માટે अकड ખૂણો अडक ની બરોબર છે. (૧. ૫)

પણ આખો ખૂણો अकड તેના ભાગ बकड કરતાં મ્હોટો છે (પ્ર. પ્ર. ૯),

માટે अडक ખૂણો પણ बकड કરતાં મ્હોટો છે;

ત્યારે बडक ખૂણો તો बकड કરતાં ઘણોજ મ્હોટો હોવો જોઈએ.

પણ बकड ત્રિકોણમાં,

बक બાજુ बड ની બરોબર છે, (પ્રતિ.)

માટે बडक ખૂણો बकड ખૂણાની બરોબર છે (૧.૫)

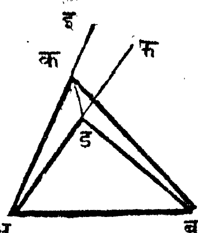
પણ તે તો આપણે बकड કરતાં ઘણો મ્હોટો છે એવું ઉપર બતાવ્યું;

માટે ઉપર પ્રમાણે આકૃતિ દોરવાથી આ અશક્ય પરિણામ આવ્યું:—કે એકજ ખૂણો બીજા કરતાં મ્હોટો પણ છે અને તેની બરોબર પણ છે; માટે આપણે જે ધારણા પ્રમાણે ઉપર બે ત્રિકોણો દોર્યા તે અશક્ય છે; એવા ત્રિકોણો દોરી શકાય નહિ.

બીજું—એવું ધારો કે એકનું શિરોબિંદુ ड બીજા ત્રિકોણની અંદર પડે છે, તો

રચના.

क, ड સાંધો (સ્વી. ૧)
અને अक, अड ને इ, फ સુધી
લંબાવો. (સ્વી. ૨)



સિદ્ધતા.

अकड ત્રિકોણમાં, अक બાજુ अड ની બરોબર છે (પ્રતિ.)

માટે, પાયાની બીજી બાજુના ખૂણાઓ इकड અને फडक બરોબર છે. (૧. ૫.)

પણ इकड ખૂણો તેના ભાગ बकड કરતાં મ્હોટો છે (પ્ર. પ્ર. ૯),

માટે फडक ખૂણો પણ बकड કરતાં મ્હોટો છે.

ત્યારે बडक ખૂણો તો बकड ખૂણા કરતાં ઘણો મ્હોટો થયો.

પણ बकड ત્રિકોણમાં, बक બાજુ बड ની બરોબર છે, (પ્રતિ.)

માટે बडक ખૂણો बकड ખૂણાની બરોબર હોવો જોઈએ. (૧. ૫.)

પણ તે તો ઉપર આપણે એના કરતાં મ્હોટો છે એમ બતાવ્યું;

એ એકેકથી ઉલટી વાત બનવી અશક્ય છે.

ત્રીજું—એકનું શિરોબિંદુ ड, પહેલા ત્રિકોણની कब બાજુના ઉપર પડે તો દેખીતુંજ અશક્ય છે, કારણ કે તેમ હોય તો ન્હાની લીટી डब મ્હોટી લીટી कब ની બરોબર થઈ જાય.

માટે, આપણે જોયું કે એકજ પાયાની એકજ દિશાએ બે એવા ત્રિકોણો દોરવા અશકય છે કે જેઓની ઇ૦ પ્ર. સિ.

ટીપઃ—એકજ બિંદુમાં મળતી લીટીઓને સોમાવાસો કહે-છે. ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વોમાં આ સિદ્ધાંત આવતો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવા માટેજ લખેલો દેખાયછે. એની સિદ્ધતા જરા નવાઈ જેવી છે, અને એવી ક્વચિતજ વાપરવામાં આવેછે. આ સિદ્ધાંતનો સીધો પુરાવો નથી; અને પુરાવામાં ગુંચવણ પડવાનું કારણ દેખાતું છે કે **નકાર** વસ્તુ સાબિત કરવી છેઃ એટલે એમ બતાવવુ છે કે એક અમુક જાતના ત્રિકોણો થઈ **ન** શકે. પુરાવો એવી રીતે આપ્યો છે કે, ધારો કે તેમ થઈ શકે, તો તેથી એક અસંભવિત અનુમાન નિકળશે. પણ એવું અશક્ય અનુમાન તો સ્વીકારાયજ નહિ; માટે જે ધારણાને લીધે આવા પરિણામ ઉપર આપણે આવી પહોંચ્યા તે ધારણા ખોટી હોવી જોઈએ.

ઉપરના સિદ્ધાંતમાં સાબિત કરવું છે કે જેવા ત્રિકોણો કહેલા છે તેવા દોરી શકાય નહિ. જો એવા દોરી શકાતા હોય તો દોરો. હવે એવા ત્રિકોણો ત્રણ રીતે દોરી શકાય; માટે ત્રણે રીતે દોરવા અશક્ય છે એવું સાબિત કીધું છે. જો એવા ત્રિકોણો દોરી શકાય તો એવું બતાવ્યું છે કે એકનો એકજ ખૂણો એક બીજા અમુક ખૂણા કરતાં મ્હોટો પણ હોવો જોઈએ, અને વળી તેની બરોબર પણ હોવો જોઈએ. પણ એ તો અશક્ય અનુમાન છે, માટે જે આપણે પહેલાં સાચું માની લીધું તેમાં ભૂલ કીધી. એક છેડે મળતી બે બાજૂઓ પણ સરખીજ હોય એમ બનવું અશક્ય છે.

યાદ રાખવું કે ગમે તે એક છેડામાં મળતી બે બાજૂઓ સરખી હોય તો તેમાં કાંઈ બાધ નથી, તેમ તો થઈ શકે;

अक અને अड સરખી હોઈ શકે, પણ ત્યારે बक અને बड સરખી થાયજ નહિ.

પ્રશ્નો.

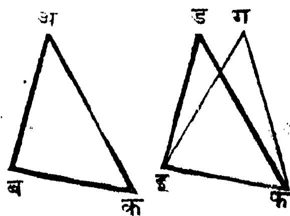
(૧) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજૂએ બે સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણો કહાડિયે તો એકનું શિરોબિંદુ બીજાની અંદર પડવું જોઈએ.

(૨) આ સિદ્ધાંતમાં આપેલી ચાર શરતો જૂદી જૂદી લખો; અને બતાવો કે તેમાંની એક પણ શરત છોડિયે તો સિદ્ધાંત ખોટો પડી જશે.

સિદ્ધાંત ૮. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની બે બાજૂઓની બરોબર હોય, અને વળી તેમના પાયા એટલે ત્રીજી બાજૂઓ પણ બરોબર હોય. તો એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓની વચ્ચેનો અન્તર્ખુણો બીજા ત્રિકોણની બે બાજૂઓના અન્તર્ખુણાની બરોબર થશે.

સાધન.



ધારો કે अबक અને डइफ બે એવા ત્રિકોણો છે કે बअ, अक બાજૂઓ અનુક્રમે इड, डफ બાજૂઓની બરોબર છે; એટલે बअ, इड़ ની બરોબર, અને अक, डफની બરોબર; અને बक પાયો इफ પાયાની બરોબર છે; તો बअक ખુણો इडफ ખુણાની બરોબર થશે.

સિધ્ધતા.

જો अबक ત્રિકોણ (ઉચકીને) डइफ ત્રિકોણ ઉપર એવી રીતે મુકિયે કે ब બિંદુ इ બિંદુ ઉપર પડે, અને बक સીધી લીટી इफ ની દિશામાં પડે,

તો क બિંદુ फ બિંદુ ઉપરજ પડશે,

કારણ કે बक લીટી इफ ની બરોબર છે; (પ્રતિ.)

અને बक લીટી इफ ઉપર પડે છે, માટે

बअ, अक લીટીઓ પણ इड, डफ ના ઉપરજ પડશે;

કારણ કે, જો તેમ ના પડે, તો ધારો કે તે લીટીઓ બીજેજ સ્થળે, इग, गफ ની દિશાએ પડે છે.

હવે इग અને इड દરેક अब ની બરોબર છે;

અને फड, फग, દરેક अक ની બરોબર છે; માટે

इड લીટી इग બરોબર, અને फड લીટી फग બરોબર; (પ્ર. પ્ર. ૧)

ત્યારે તો એકજ પાયા इफ ઉપર અને તેની એકજ બાજૂએ બે ત્રિકોણો इडफ, इगफ એવા થયા કે इ બિંદુમાં મળતી બાજૂઓ સરખી થઈ, અને વળી फ બિંદુમાં મળતી બાજૂઓ પણ સરખી થઈ. એ બનવું અશક્ય છે, (૧. ૭)

માટે बअ, अक લીટીઓ इड, डफ ના ઉપરજ પડવી જોઈએ;

અને બીજી કોઈ રીતે પડી શકે નહિ.

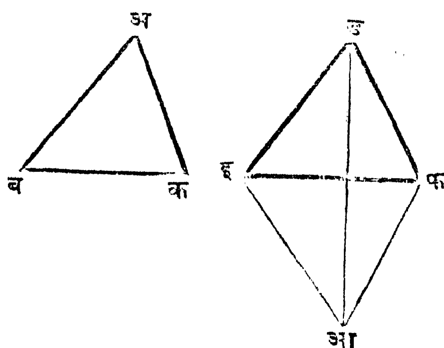
પણ જો તેમ હોય ત્યારે તો अ ખુણો ड ના ઉપરજ પડ્યો; એટલે बअक ખુણો इडफ ની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૮)

માટે જો એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓ ૬૦ प्र. सि.

ઉપસિદ્ધાંતઃ—ઉપલા સિદ્ધાંત ઉપરથી સ્પષ્ટ છે કે એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજૂઓ અનુક્રમે બીજાની ત્રણ બાજૂઓની બરોબર હોય તો તે ત્રિકોણો પણ એકેકની બરોબર છે.

ટીપઃ—ઉપલી સિદ્ધતાનો આધાર પણ ઉલટ પુરાવા ઉપર રહેલો છે; અને વળી ૭ મા સિદ્ધાંતની સહાયથી સિદ્ધ થયો છે, જે સિદ્ધાંત સમજવો જરા કઠિન છે, માટે એજ સિદ્ધાંત નીચેની રીતે પણ સિદ્ધ થઈ શકે છે.

△ अबक ને △ डइफ ઉપર એવી રીતે મૂકો કે ब બિંદુ इ



ઉપર પડે; અને बक લીટી इफ ની દિશાએ પડે; અને તેનું अ શિરોબિંદુ इफ પાયાની બીજી બાજૂ ઉપર પડે.

હવે बक લીટી इफ ની બરોબર છે, માટે क બિંદુ फ ઉપરજ પડશે.

ત્યારે बअक ત્રિકોણ इआफ સ્થલે પડશે.

डआ સાંધો. इआ=अब (રચ.)

પણ इड=अब (પ્રતિ.) ∴इआ=इड (પ્ર. પ્ર. ૧)

∴ <इडआ = <इआड (૧.૫)
તેમજ डफ બરોબર आफ ∴ < आडफ = <फआड.
∴ આખો ખૂણો इडफ = इआफ (પ્ર. પ્ર. ૨)
પણ < इआफ = <बअक (પ્રતિ.) ∴ <इडफ = <बअक.

प्र. सि.

જો क અને फ ખૂણા પહોળા ખૂણા હોય તો डआ લીટી ત્રિકોણની બહાર પડશે, અને તેઓ કાટખૂણા હોય તો डफ અને फआ જોડાઇને डआ થશે; પણ સિદ્ધતા તો ઉપર પ્રમાણેજ રહેશે.

પ્રશ્ન.

(૧) એક સમબાજૂ ચતુષ્કોણનો કર્ણ જે ખૂણાઓ સાંધે છે તે ખૂણાને દ્વિભાગે છે.

(૨) એક સમબાજૂ ચતુષ્કોણના કર્ણ એકેકને દ્વિભાગે છે અને એકેક ઉપર લંબ છે.

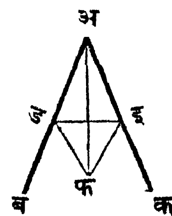
(૩) સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણના પાયાનું મધ્યબિંદુ તેના શિરોબિંદુ સાથે એક લીટીથી સાંધ્યું તો તે લીટી શિરોબિંદુને તથા ત્રિકોણને દ્વિભાગશે અને પાયા ઉપર લંબ થશે.

સિદ્ધાંત ૯. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક આપેલા સીધીલીટીખૂણાને દ્વિભાગવો, એટલે તેના બે સરખા ભાગ કરવા.

સાધન.

ધારો કે बअक આપેલો ખૂણો છે; તેને દ્વિભાગવો છે.



રચના.

अब લીટીમાં એક ड બિંદુ લો;

અને अक લીટીમાંથી अइ ભાગ अड બરોબર કાપો. (૧.૩)

ड અને इ સાંધો (સ્વી.૧)

અને डइ લીટી ઉપર अ બિંદુની સામેની તરફ એક સમબાજૂ ત્રિકોણ डफइ દોરો. (૧.૧)

अ અને फ સાંધો (સ્વી.૧)

તો अफ લીટી बअक ખુણાને દ્વિભાગશે.

સિદ્ધતા.

डअफ અને इअफ ત્રિકોણોમાં डअ લીટી इअ ની બરોબર છે. (રચ.)

અને अफ બન્નેમાં સાધારણ છે.

અને ત્રિ૦ બાજૂ डफ ત્રિ૦ બાજૂ इफની બરોબર છે. (રચના)

માટે डअफ ખુણો इअफ ખુણાની બરોબર છે. (૧.૮)

માટે આપેલા ખુણા बअक ના अफ લીટીથી બે સરખા ભાગ થયા. कृ. कृ.

પ્રશ્ન.

(૧) એજ આકૃતિમાં બતાવો કે अफ લીટી डफइ ખુણો પણ દ્વિભાગેછે.

(૨) એક આપેલા ખુણાના ચાર સરખા ભાગ કરો.

(૩) જો डफइ ત્રિકોણ अ શિરોબિંદુવાળી બાજૂએ કહાડયો હોય તોપણ સિદ્ધાંત સિદ્ધ થઈ શકેછે.

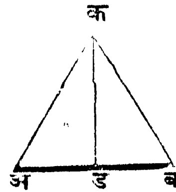
(૪) પણ તેમ કરતાં એક અમુક પ્રસંગે બાધ આવેછે તે ક્યારે?

(પ) જો સમબાજૂ ત્રિકોણ આકૃતિમાં ન કહાડતાં ફક્ત સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણજ પાયા ઉપર કહાડ્યો હોય તો આ કૃત્ય સિદ્ધ થાય કે નહિ?

સિદ્ધાંત ૧૦. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક આપેલી અન્તવાન સીધી લીટીને દુભાગવી એટલે તેના બે સરખા ભાગ કરવા.

સાધન.



ધારો કે अब આપેલી સીધી લીટી છે;

તેના બે સરખા ભાગ કરવાના છે.

રચના.

अब લીટી ઉપર એક સમબાજૂ ત્રિકોણ अबक દોરો. (૧.૧)

અને अकब ખૂણાને कड લીટીએ દુભાગો. (૧.૯)

એ લીટી अब ને ड બિંદુમાં મળેછે.

તો अब લીટીને ड બિંદુ દુભાગશે.

સિદ્ધતા.

अकड અને बकड ત્રિકોણોમાં

अक લીટી बकની બરોબર છે, (રચના)

અને कड લીટી બન્નેમાં સાધારણ છે,

અને अकड અન્તર્ખૂણો बकड અન્તર્ખૂણાની બરોબર છે. (રચના)

માટે એ ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે.

માટે અડ પાયો દડ ની બરોબર છે. (૧.૪)

માટે ડ બિંદુમાં આપેલી લીટીના બે સરખા ભાગ થયા. કૃ. કૃ.

પ્રશ્ન.

(૧) એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુના ખુણાને દુભાગનારી લીટી પાયાને પણ દુભાગશે.

(૨) એક આપેલા પાયા ઉપર એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ એવો દોરો કે તેની સમબાજુઓનો સર્વાળો એક આપેલી લીટીની બરોબર થાય.

(૩) એક આપેલી અન્તવાન સીધી લીટીના આઠ સરખા ભાગ કરો.

(૪) આપેલી લીટીના પ્રત્યેક છેડાને મધ્યબિંદુ અને આપેલી લીટીને ત્રિજ્યા ધારીને બે વર્તુલો દોરો; તો જે બે બિંદુઓમાં એ વર્તુલો એકેકને છેદેછે તે તે બિંદુઓ સાંધવાથી આપેલી લીટી દુભાગાશે.

(૫) ઉપલા પ્રશ્નમાં દુભાગનારી લીટી આપેલી લીટીને લંબ છે.

(૬) જે ચતુષ્કોણાકૃતિના કર્ણો એકેકને દુભાગે અને એકેક ઉપર લંબ હોય તે આકૃતિ સમબાજૂ હોવી જોઈએ.

(૭) એક અન્તવાન સીધી લીટીને એવી લંબાવો કે લંબાવેલો ભાગ તે આખી લંબાયલી લીટીનો ત્રિજો ભાગ થાય.

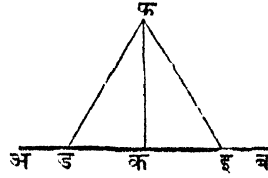
સિદ્ધાંત ૧૧. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક આપેલી સીધી લીટી ઉપર તે લીટીમાં એક આપેલા બિંદુમાંથી લંબ દોરવી.

સાધન.

ધારો કે अब આપેલી લીટી છે, અને તેમાં क આપેલું બિંદુ છે.

क બિંદુમાંથી એક લીટી अब ઉપર લંબ દોરવાની છે.



રચના.

अक માં એક ड બિંદુ લો; અને कब માંથી कइ લીટી कड બરોબર કાપો. (૧. ૩)

डइ લીટી ઉપર એક સમબાજુ ત્રિકોણ डफइ દોરો. (૧. ૧)

कफ સાંધો;

ત્યારે कफ લીટી अब ઉપર લંબ થશે.

સિદ્ધતા.

डकफ અને इकफ ત્રિકોણોમાં, डक લીટી इक ની બરોબર છે. (રચના)

અને कफ બન્નેમાં સાધારણ છે,

અને ત્રિજી બાજુ डफ ત્રિજી બાજુ इफ ની બરોબર છે; (રચના)

માટે डकफ ખુણો इकफ ખુણાની બરોબર છે. (૧. ૮)

અને વળી તેઓ પાસપાસેના ખુણા છે,

પણ જ્યારે એક લીટી બીજી ઉપર ઉભી રહીને પાસપાસેના ખુણા સરખા કરે ત્યારે તે દરેક ખુણાને કાટખુણો કહે છે. (વ્યા. ૧૦)

માટે डकफ અને इकफ દરેક કાટખુણો છે.

માટે कफ લીટી अब ઉપર લંબ છે, અને તે क બિંદુ-માંથી દોરી છે. क. क.

પ્રશ્ન.

(૧) ઉપલી આકૃતિમાં બતાવો કે फक માં અથવા તેને લંબાવીને તેમાં કોઈ પણ બિંદુ લઈએ તો તે ड અને इ બિંદુ-ઓથી સરખે અન્તરે છે.

(૨) જો આપેલું બિંદુ લીટીને છેડે હોય તો સિદ્ધાંતમાં શીખેલી રચના ઉપરાંત શી રચના કરવી જોઈએ?

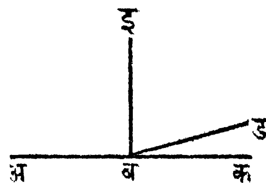
(૩) એકજ બિંદુમાંથી આવી લંબ કેટલી દોરી શકાય?

(૪) એક સમબાજુ ત્રિકોણની બે બાજુઓ દુભાગીને તે બિંદુઓમાંથી તે બાજુઓને બે લંબ દોરો; જે બિંદુમાં તે લંબો મળેછે તેને ત્રિકોણના ત્રણે શિરોબિંદુ સાથે સાંધો; તો તે ત્રણ સાંધનારી લીટીઓ સરખી થશે.

(૫) બતાવો કે આ સિદ્ધાંત નવમા સિદ્ધાંતનોજ એક દૃષ્ટાંત છે.

ટીપ:—આ સિદ્ધાંત ઉપરથી એવું અનુમાન થઈ શકેછે કે બે સીધી લીટીઓને એક સામાન્ય ખંડ હોઈ શકે નહિ.

જો એમ બની શકે તો ધારો કે બે સીધી લીટી अबक અને अबड ને એક સામાન્ય ખંડ अब છે. તો ब બિંદુમાંથી बइ લીટી अब ને લંબ દોરો (૧. ૧૧)



માટે < अबइ = < कबइ (વ્યા. ૧૦) કારણકે अबक એકજ લીટી છે. તેમજ < अबइ = < डबइ (વ્યા. ૧૦)

કારણકે अबड એકજ લીટી છે ∴ < कबइ = < डबइ (પ્ર. પ્ર. ૧)

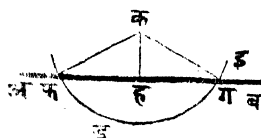
મ્હોટો ખૂણો ન્હાનાની બરોબર, એ અશક્ય છે. માટે બે સીધી લીટીનો એક સામાન્ય ખંડ હોઈ શકે નહિ.

સિદ્ધાંત ૧૨. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક આપેલી અમર્યાદ સીધી લીટી ઉપર તેની બહારના એક આપેલા બિંદુમાંથી એક લંબ દોરવી.

સાધન.

ધારો કે अब એક એવી સીધી લીટી છે કે બન્ને બાજુએ લંબાવી શકાય; અને क તેની બહાર આપેલું બિંદુ છે. તો क બિંદુમાંથી એક લીટી अब ને લંબ દોરવી છે.



રચના.

આપેલી લીટીની બીજી બાજુએ એક ड બિંદુ લો;

क મધ્યબિંદુ અને कड ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુલ फगइ દોરો (રચી. ૩)

અને ધારો કે તે આપેલી લીટીને फ અને ग બિંદુમાં છેદે છે.

फग ને ह બિંદુમાં દુભાગો; (૧.૧૦)

कह સાંધો;

તો कह લીટી अब ઉપર લંબ થશે.

कफ અને कग સાંધો.

फहक અને गहक ત્રિકોણોમાં,

फह લીટી गह ની બરોબર છે; (રચ.)

અને हक બન્નેમાં સાધારણ છે;

અને ત્રિજી બાજુ कफ ત્રિજી બાજુ कग ની બરોબર છે (વ્યા. ૧૫),

કારણ કે એકજ વર્તુલની એ ત્રિજ્યાઓ છે;

માટે કહક ખૂણો કહગ ખૂણાની બરોબર છે. (૧.૮) અને તે ખૂણા પાસપાસેના છે;

પણ જ્યારે એક લીટી બીજી ઉપર ઉભી રહીને પાસપાસેના ખૂણા એકેકની બરોબર કરેછે, ત્યારે દરેક ખૂણો કાટખૂણો હોવો જોઇએ, માટે ह આગળના બન્ને ખૂણા કાટખૂણા છે. માટે આપેલા क બિંદુમાંથી, कह લીટી अब ને લંબ દોરી. कृ. कृ.

ટીપઃ—આપેલી લીટી અમર્યાદ હોવી જોઇએ; કે જે વર્તુલ દોરાય તેને બે બિંદુઓમાં છેદવા માટે દરેક બાજુએ તે લીટી લંબાવી શકાય.

પ્રશ્ન.

(૧) એક ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી સામેની બાજૂ ઉપર દોરેલી લંબ તે બાજુને દ્વિભાગે, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજૂ હોવો જોઇએ.

(૨) એક ત્રિકોણના દરેક શિરોબિંદુમાંથી સામેની બાજૂઓ ઉપર દોરેલી લંબ તે બાજૂઓને દ્વિભાગે તો તે ત્રિકોણ સમબાજૂ હોવો જોઇએ.

(૩) એક સમબાજૂ ત્રિકોણના શિરોબિંદુ અને સામેની બાજૂનાં મધ્યબિંદુ સાંધનારી લીટીઓ સમ હોવી જોઇએ.

(૪) એક અમર્યાદ લીટી અને તેની બહારના એક બિંદુ વચ્ચેનો અન્તર કેમ કહાડવો?

પરચૂરણ પ્રશ્નો (સિદ્ધાંત ૧-૧૨.)

૧. એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણના પાયામાં બે બિંદુઓ બન્ને છેડેથી સમાન્તર આપ્યાં છે; તો બતાવો કે તે બિંદુઓ તે ત્રિકોણના માથાના શિરોબિંદુથી પણ સરખેજ અન્તરે છે.

૨. એક ચતુષ્કોણાકૃતિની સામસામેની બાજૂઓ બરોબર હોય તો સામસામેના ખૂણા પણ બરોબરજ થશે.

૩. अबक એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ છે, જેમાં अब=अक; ब અને क ખૂણાને બે લીટીઓ દુભાગેછે; અને તે લીટીઓ ड બિંદુમાં મળેછે; તો डअ લીટી बअक ખૂણાને દુભાગશે.

૪. એક સમબાજૂ ત્રિકોણની દરેક બાજૂને દુભાગીને તે ત્રણ બિંદુઓને સાંધતાં જે ત્રિકોણ થાય તેપણ સમબાજૂજ થશે.

૫. એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ अबक ની अब અને अक સરખી બાજૂઓ अ ખૂણાની પાર વધારી, અને તેમાં બે બિંદુઓ એવાં લીધાં કે अइ=अफ; फब અને फक બિંદુઓ સાંધ્યાં; તો फब=इक થશે.

૬. એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ अबक ની अब અને अक સરખી બાજૂઓમાં બે બિંદુઓ क्ष અને य એવાં લીધાં કે अक्ष=अय; અને कक्ष અને बय સાંધ્યાં, તો ड બિંદુમાં એકેકને છેદેછે; તો

(૧) बडक ત્રિકોણ સમદ્વિબાજૂ થશે,

(૨) अड લીટી बअक ખૂણાને દુભાગશે;

(૩) અને अड લંબાવીશું, તો बक ને દુભાગશે અને તે ઉપર લંબ થશે.

૭. એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણનો પાયો, અને માથાના શિરોબિંદુ ઉપરથી પાયા ઉપર દોરેલી લંબ આપેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ બનાવો.

૮. એક આપેલી સીધી લીટીમાં એક એવું બિંદુ શોધી કહાડો કે તે લીટીની એકજ બાજૂએ આપેલાં બે બિંદુઓથી સરખે અન્તરે હોય.

૯. ઉપલાજ પ્રશ્નમાં આપેલાં બિંદુઓ લીટીની જુદી જુદી બાજૂએ લો.

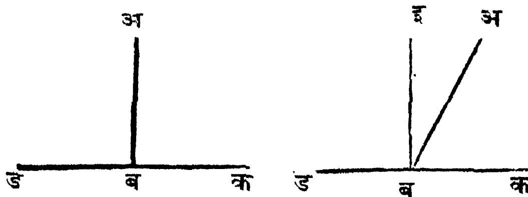
૧૦. अबक ત્રિકોણમાં अबक ખૂણો સાંકડોખૂણો છે; તો बअ માં અથવા તેને લંબાવતાં જે લીટી થાય તેમાં એક ड બિંદુ એવું શોધી કહાડો કે बड=कड.

સિદ્ધાંત ૧૩. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો એક સીધી લીટી બીજી સીધી લીટી ઉપર પડીને તેની સાથે ખૂણા કરે, તો તે બે ખૂણા કાટખૂણા હોવા જોઇએ. અથવા તે બે ખૂણા મળીને બે કાટખૂણાની બરોબર હોવા જોઇએ.

સાધન.

ધારો કે अब સીધી લીટી कड સીધી લીટી ઉપર પડે છે;



તો પાસપાસેના ખૂણા डबअ, अबक બે કાટખૂણા થશે; અથવા તે બે ખૂણા મળીને બે કાટખૂણાની બરોબર થશે.

સિદ્ધતા.

(૧) કારણ કે જો એ બે ખૂણા (આ. ૧) એકેકની બરોબર હોય તોતો દરેક એક કાટખૂણો હોવો જોઇએ; (વ્યાખ્યા ૧૦).

(૨) પણ જો ડ ब अ ખૂણો अ ब क ખૂણાની બરોબર ન હોય, (આ. ૨), તો ब બિંદુમાંથી ब इ લીટી क ड ઉપર લંબ દોરો; (૧.૧૧)

ડ ब अ ખૂણો બે ખૂણા ड ब इ, इ ब अ થી બનેલો છે.

માટે ड ब अ ખૂણો તે બે ખૂણાની બરોબર થયો. (પ્ર.પ્ર.૮)

એ સમાનતામાં अ ब क ખૂણો ઉમેરો;

તો બે ખૂણા ड ब अ અને अ ब क તે ત્રણ ખૂણા ड ब इ, इ ब अ અને अ ब क ની બરોબર થયા. (પ્ર. પ્ર. ૨)

વળી इ ब क ખૂણો इ ब अ અને अ ब क ખૂણાઓથી થયેલો છે; અને તે માટે તેઓની બરોબર છે;

એ દરેકમાં ड ब इ ખૂણો ઉમેરો;

તો इ ब क અને ड ब इ ખૂણા તે ત્રણ ખૂણા ड ब इ, इ ब अ, અને अ ब क ની બરોબર થયા. (પ્ર. પ્ર. ૨)

પણ એજ ત્રણ ખૂણા તો બે ખૂણા ड ब अ, अ ब क ની બરોબર છે એમ સિદ્ધ કીધું; માટે ड ब अ, अ ब क ખૂણા ड ब इ, इ ब क ખૂણાની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧)

પણ ड ब इ, इ ब क ખૂણા તો બે કાટખૂણાની બરોબર છે; (વ્યા. ૧૦)

માટે ड ब अ, अ ब क ખૂણાપણ બન્ને મળીને બે કાટખૂણાની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧) પ્ર. સિ.

ટીપઃ—પ્રતિજ્ઞા તપાશી જોતાં જણાશે કે બે લીટીઓ એકેક સાથે મળીને એકજ સીધી લીટી થઈ જાય, અથવા એકને છેડે બીજીનો છેડો મળી જાય, એવી બે લીટીઓનો વિચાર આ સિદ્ધાંતમાં કરવાનો નથી.

आ सिद्धांतमां एम साबित करवानुं छे के बे खूणा थशे ते दरेक एकेक काटखूणो थशे; अथवा तो ते बे खूणा मळीने बे काटखूणा बरोबर थशे.

वळी एम पण स्पष्ट छे के एक लीटीने बीजी एकज लीटी न मळे, पण घणीक लीटीओ एकज बिंदु आगळ मळे तो जेटला खूणा थशे ते बधा मळीने पण बे काटखूणा बरोबरज थशे. ए उपसिद्धांतनी आकृति दोरवाथी समजण वधारे पडशे.

व्याख्या (१) ज्यारे बे खूणाओनो सर्वाळो बे काटखूणा बरोबर होय, त्यारे तेओ न्यूनतापूरक छे एम कहेवायछे; अने तेमांनो एक खूणो बीजानो न्यूनतापूरक खूणो कहेवाय.

(२) जो बे खूणाओनो सर्वाळो एक काटखूणा बरोबर होय तो तेओ कोटी खूणा कहेवायछे; अने एक खूणो बीजानो कोटी कहेवाय.

प्रश्न.

(१) एक त्रिकोणना पायाने बन्ने बाजूए लंबावतां जे खूणा थाय ते सरखा होय तो ते त्रिकोण समद्विबाजु होवो जोईए.

(२) एक लीटी बीजी लीटी साथे जे बे खूणा करेछे ते बन्नेने दुभागिये तो दुभागनारी लीटीओ वच्चेनो खूणो काटखूणो थशे.

(३) उपरनो प्रश्न घणो अगत्यनो छे. ते आवी रीते पण लखाय:—

एक खूणाने अंदरथी अने बहारथी दुभागनारी लीटीओ एकेकने लंब छे.

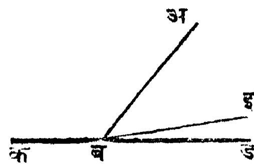
(४) दुभागनारी दरेक लीटी साथे आपेली लीटीओ जे खूणा करेछे ते न्यूनतापूरक छे.

સિદ્ધાંત ૧૪. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એકજ સીધી લીટીને એકજ બિંદુ આગળ પણ વિરૂદ્ધ બાજૂઓ તરફ બે બીજી સીધી લીટીઓ મળીને જે પાસપાસેના ખૂણાઓ કરે તેઓનો સર્વાળો જો બે કાટખૂણા બરોબર હોય, તો તે બે સીધી લીટીઓથી એકની એકજ અખંડ સીધી લીટી થશે.

સાધન.

अब સીધી લીટીના ब બિંદુ આગળ बक અને बड બે સીધી લીટીઓ વિરૂદ્ધ દિશાએથી આવીને अबक, अबड ખૂણા બે મળીને બે કાટખૂણા બરોબર કરેછે; તો बक અને बड લીટીઓ મળીને એકની એકજ અખંડ સીધી લીટી થશે.



સિદ્ધતા.

કેમકે, જો बड લીટી बक લીટીની સાથે એકજ અખંડ સીધી લીટીમાં ન હોય, અને જૂદીજ લીટીમાં હોઈ શકે, તો એમ ધારો કે कबને લંબાવતાં તે बड દિશામાં નહિ, પણ बइ દિશામાં જશે.

તો कबइ એકજ સીધી લીટી;

અને તેને अब લીટી મળેછે;

માટે પાસપાસેના ખૂણાઓ अबक, अबइ બે મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે. (૧.૧૩)

પણ अबक અને अबड ખૂણાઓ પણ બે મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે. (પ્રતિ.)

માટે अबक, अबइ ખૂણા મળીને अबक અને अबड ખૂણાની બરોબર છે. (પ્ર.પ્ર.૧)

એ સરખા ખૂણાઓમાંથી સાધારણ ખૂણો अबक બાદ કરો;

તો બાકીનો ખૂણો अबइ બાકીના ખૂણા अबड ની બરોબર છે. (પ્ર.પ્ર.૩)

એટલે આખો ખૂણો તેના ન્હાના ભાગની બરોબર છે; એ અશક્ય છે. (પ્ર.પ્ર.૯)

માટે बक ને લંબાવીશું તો बइ ની દિશામાં જશે નહિ;

અને એવીજ રીતે આપણે સિદ્ધ કરી શકીશું કે बड શિવાય કોઈપણ દિશામાં बक ને લંબાવવી અશક્ય છે; માટે बक અને बड બંને મળીને એકજ અખંડ સીધી લીટીમાં હોવી જોઈએ. પ્ર. સિ.

ટીપઃ—(૧) આ સિદ્ધાંતનો પુરાવો અથવા સાબિતી ૭ મા સિદ્ધાંતના જેવી છે. પ્રતિજ્ઞામાં કહ્યા પ્રમાણે જો બે લીટીઓ ત્રિજીને મળે તો તે બે મળીને એકજ સીધી લીટીમાં હોવી જોઈએ. જો એમ ધારિયે કે તેમ નથી, તો એવાં અનુમાનનું છેવટ અશક્ય આવેછે; માટે એવું વિરૂદ્ધ અનુમાન ખોટું.

(૨) આ સિદ્ધાંત તેરમાથી ઉલટો છે.

પ્રશ્નો.

(૧) એજ સિદ્ધાંત डब લીટી ब બિંદુ પાર વધારીને સાબિત કરો.

(૨) પ્રતિજ્ઞામાં વિરૂદ્ધ શબ્દ લખવો અવશ્ય છે તે બતાવો; એકજ બાજૂએ એવી લીટીઓ મળી શકે કે કેમ?

(૩) એક સમબાજૂ ચતુષ્કોણની એક કર્ણ દુભાગીને તે બિંદુમાંથી સામેના બન્ને ખૂણા સુધી બે લીટીઓ દોરિયે તો તે બે લીટી એકજ સીધી લીટીમાં છે.

સિદ્ધાંત ૧૫. પ્રમેય.

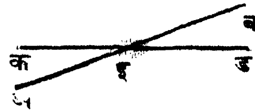
પ્રતિજ્ઞાઃ—જો બે સીધી લીટીઓ એક બીજીને છેદે તો સામસામેના ખૂણા બરોબર થશે.

સાધન.

ધારો કે अब અને कड સીધી લીટીઓ એક બીજીને इ બિંદુમાં છેદેછે;

તો अइक ખૂણો डइब ખૂણાની બરોબર થશે,

અને कइब ખૂણો अइड ખૂણાની બરોબર થશે.



સિદ્ધતા.

अइ લીટી कड લીટી સાથે પાસપાસેના ખૂણા कइअ, अइड કરેછે; માટે તે બે ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે. (૧.૧૩)

અને વળી डइ લીટી अब લીટીની સાથે अइड, डइब ખૂણા કરેછે; માટે તે બે ખૂણા મળીને પણ બે કાટખૂણા બરોબર છે.

માટે कइअ, अइड ખૂણાઓ अइड, डइब ખૂણાઓની બરોબર છે. (પ્ર.પ્ર.૧)

એ સમખૂણાઓમાંથી સાધારણ ખૂણો अइड બાદ કરો;

તો બાકી રહેલો ખૂણો કઈઞ બાકી રહેલા ખૂણા ડઈબ-ની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૩)

એજ પ્રમાણે બઈક ખૂણો અઈડ ખૂણાની બરોબર સિદ્ધ થઈ શકે.

માટે જો બે સીધી લીટીઓ ઇ૦. પ્ર. સિ.

ઉપસિદ્ધાંત ૧. આ ઉપરથી સ્પષ્ટ છે કે જો બે સીધી લીટીઓ એક બીજાને છેદે, તો છેદવાના બિંદુ આગળ જે ખૂણાઓ થાય તે બધા મળીને ચાર કાટખૂણાની બરોબર છે.

ઉ. સિ. ૨. તેમજ ગમે એટલી સીધી લીટીઓ એકજ બિંદુ આગળ એકેકને છેદે તો તે બિંદુ આગળ જેટલા ખૂણાઓ થાય તે બધા મળીને ચાર કાટખૂણાની બરોબર છે.

ટીપઃ—(૧) આ સિદ્ધાંતને સંક્ષેપમાં બતાવિયે, તો એમ કહેવાય કે, સામસામેના ખૂણાઓનો ન્યૂનતાપૂરક ખૂણો સાધારણ છે તેથી તે ખૂણાઓ બરોબર છે.

(૨) આ સિદ્ધાંત ખૂણાની વ્યાખ્યાનો માત્ર વધારો છે એમ કહી શકાય. બે સીધી લીટીઓ એક બીજીને મળે ત્યારે તેઓની વચ્ચેનો ઝોંક તે એક ખૂણો થયો, પણ તે ખૂણાના શિરોબિંદુની પાર તે લીટીઓને વધારિયે તોપણ તે ખૂણો કાંઈ બદલાતો નથી, એવું આ સિદ્ધાંતમાં બતાવ્યુંછે.

પ્રશ્ન.

(૧) આ સિદ્ધાંતના ઉલટ પક્ષની પ્રતિજ્ઞા લખો, અને તે સિદ્ધ કરો.

(૨) ઉપલા બે ઉપસિદ્ધાંતોની આકૃતિ દોરો, અને સિદ્ધ કરો.

(૩) અરસ્પરસ છેદનારી બે લીટીઓના કોઇપણ સામસામેના ખૂણાઓને દુભાગનારી બે લીટીઓ એકજ અખંડ સીધી લીટીમાં હોવી જોઈએ.

(૪) એક ખુણાના શિરોબિંદુમાંથી તે ખુણાઓની બન્ને બાજૂઓ ઉપર લંબ દોરી, તો તે બે લંબોની વચ્ચેનો ખુણો આપેલા ખૂણાની બરોબર થશે, અથવા તે ખુણાનો ન્યૂનતાપૂરક ખૂણો થશે.

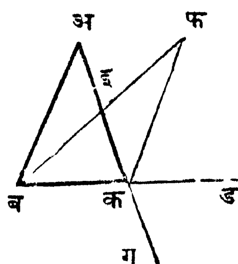
(૫) જે ચતુષ્કોણની કર્ણો એકેકને દુભાગે તેની સામસામેની બાજૂઓ બરોબર છે.

(૬) એક ત્રિકોણની અંદર એક બિંદુ લઈને તેને ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણા સાથ જોડીએ, તો તે બિંદુ આગળના ખૂણા બધા મળીને ચાર કાટખુણાની બરોબર થશે.

સિદ્ધાંત ૧૬. મો.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો કોઈ ત્રિકોણની એક બાજૂને લંબાવી તો બહારનો ખુણો માંહેના સામસામેના ખુણા માંહેલા કોઈ પણ એક કરતાં મ્હોટો થશે.

સાધન.



अबक એક ત્રિકોણ છે; જેની बक બાજુ ड બિંદુ સુધી લંબાવી; તો બહારનો ખુણો अकड માંહેના સામસામેના कबअ, बअक દરેક ખુણા કરતાં મ્હોટો થશે.

રચના.

अक બાજૂને इ બિંદુમાં દુભાગો; (૧. ૧૦)
बइ સાંધો; અને તેને फ બિંદુ સુધી લંબાવો, અને इफ લીટી बइ લીટી જેટલી કરો. (૧. ૩)
फक બિંદુઓ સાંધો.

સિદ્ધતા.

અइब, कइफ ત્રિકોણોમાં, अइ લીટી कइ ની બરોબર છે; (ર૫.)

અને इब લીટી इफ ની બરોબર છે, (ર૫.)

અને अइब ખૂણો સામેના ખૂણા कइफ ની બરોબર છે, (૧. ૧૫)

માટે अइब ત્રિકોણ સર્વ પ્રકારે कइफ ત્રિકોણની બરોબર છે. (૧. ૪)

માટે बअइ ખૂણો इकफ ખૂણાની બરોબર છે.

પણ इकड ખૂણો इकफ ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે;

માટે इकड ખૂણો बअइ ખૂણા કરતાં પણ મ્હોટો છે.

એટલે બહારનો ખૂણો अकड માંહેલા ખૂણા बअक કરતાં મ્હોટો છે.

એવીજ રીતે, જો बक ને દુભાગીને अक લીટી ग બિંદુ સુધી વધારીશું, તો बकग ખૂણો अबक ખૂણા કરતાં મ્હોટો સિદ્ધ કરીશું.

પણ बकग ખૂણો તો अकड ખૂણાની બરોબર છે; (૧.૧૫)

માટે अकड ખૂણો પણ अबक ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે.

માટે જો કોઈ ત્રિકોણની ઇ० प्र. सि.

પ્રશ્ન.

(૧) अकड ખૂણો अबक કરતાં મ્હોટો છે તે આકૃતિ દોરીને સિદ્ધ કરો.

(૨) તેમજ अ આગળનો બહારનો ખૂણો ब ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે તે સિદ્ધ કરો.

(૩) એક ત્રિકોણનો પ્રત્યેક ખૂણો બીજા ખૂણાઓ માંહેલા હરેકના ન્યૂનતાપૂરક ખૂણા કરતાં ન્હાનો છે.

(૪) એક ત્રિકોણમાં એક ખૂણો કાટખૂણો અથવા પહોળો ખૂણો હોય તો બીજા ખૂણા સાંકડા હોવા જોઈએ.

(૫) એક બહારના બિંદુમાંથી એકજ સીધી લીટી ઉપર બે લંબ દોરી શકાય નહિ.

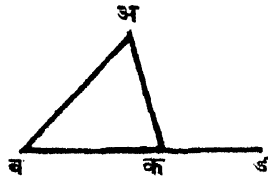
(૬) એક સમબાજૂ ત્રિકોણની એક બાજૂ લંબાવી તો બહારનો ખૂણો અંદરના પ્રત્યેક ખૂણા કરતાં મ્હોટો હોવો જોઈએ, તથા તે ખૂણો પહોળો ખૂણોજ હોવો જોઈએ.

(૭) એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણના સરખા ખૂણાઓ સાંકડા ખૂણાજ હોવા જોઈએ.

સિદ્ધાંત ૧૭. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક ત્રિકોણના કોઈપણ બે ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા કરતાં ઓછા છે.

સાધન.



अबक એક ત્રિકોણ છે; તો તેના કોઈપણ બે ખૂણા, જે-વાકે अबक, अकब બન્ને મળીને બે કાટખૂણા કરતાં ઓછા છે.

રચના.

बक બાજૂને ड બિંદુ સુધી લંબાવો.

સિદ્ધતા.

अकड ખૂણો अबक ત્રિકોણનો બહારનો ખૂણો છે, માટે તે માંહેલા સામેના ખૂણા अबक કરતાં મ્હોટો છે.

(૧. ૧૬)

એ દરેક ખુણામાં अकब ખુણો ઉમેરો;

ત્યારે अकड, अकब ખુણાઓ अबक, अकब ખુણાઓ કરતાં મ્હોટા છે. (પ્ર. પ્ર. ૪)

પણ પાસપાસેના अकड, अकब ખુણાઓ બે કાટખુ-ણાની બરોબર છે, (૧. ૧૩)

માટે अबक, अकब ખુણાઓ મળીને બે કાટખુણાઓ કરતાં ઓછા છે.

એજ પ્રમાણે સિદ્ધ થઈ શકશે કે હરકોઈ બે ખુણાઓ મળીને બે કાટખુણા કરતાં ઓછા છે.

માટે જો એક ત્રિકોણના કોઈ પણ ઇ૦ प्र. सि.

ટીપઃ—(૧) આ સિદ્ધાંત ૧૬ માનો માત્ર ઉપસિદ્ધાંતજ છે.

(૨) સિદ્ધાંત ૧૬-૧૭ બન્ને ૩૨ મા સિદ્ધાંતમાં સમાઈ જાયછે, તે તે સિદ્ધાંતની પ્રતિજ્ઞા વાંચવાથી જણાશે.

(૩) આ સિદ્ધાંત ઉપરથી જણાયછે કે કોઈપણ ત્રિકોણમાં ઓછામાં ઓછા બે સાંકડાખુણા તો હોવાજ જોઈએ.

(૪) આ સિદ્ધાંત ૧૨ પ્રત્યક્ષપ્રમાણનો ઉલટ પક્ષ છે.

પ્રશ્નો.

(૧) આ સિદ્ધાંતની અને બારમા પ્રત્યક્ષપ્રમાણની પ્રતિ-જ્ઞાઓ એવી રીતે લખો કે તે ઉપરથી એક બીજાના ઉલટ પક્ષ છે તે દેખાઈ આવે.

(૨) ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુને સામેની બાજુના કોઈપણ બિંદુસાથે સાંધીને આ સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

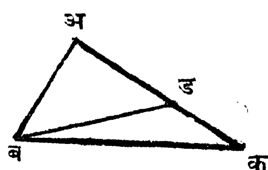
(૩) જો એક ત્રિકોણની કોઈપણ બે બાજૂઓ લંબાવી તો બહારના બે ખુણાઓ બે કાટખુણા કરતાં વધારે થશે.

(૪) એક ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી એક લંબ પાયા ઉપર દોરી, તો તે લંબ ત્રિકોણની અંદર ક્યારે પડશે અને બહાર ક્યારે પડશે?

સિદ્ધાંત ૧૮. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—કોઈપણ ત્રિકોણમાં જો એક બાજુ બીજી કરતાં મ્હોટી હોય તો મ્હોટી બાજુની સામેનો ખૂણો ન્હાની બાજૂની સામેના ખૂણા કરતાં મ્હોટો થશે.

સાધન.



ધારો કે अबक એક ત્રિકોણ છે, જેની अक બાજૂ अब કરતાં મ્હોટી છે.

તો अबक ખૂણો अकब ખૂણા કરતાં મ્હોટો થશે.

રચના.

મ્હોટી अक માંથી ન્હાની अब જેટલો એક ભાગ अड કાપો; (૧.૩)

बड સાંધો.

સિદ્ધતા.

अबड ત્રિકોણમાં अब બાજૂ अड ની બરોબર છે, માટે अबड ખૂણો अडब ખૂણાની બરોબર છે. (૧. ૫)

પણ बडक ત્રિકોણનો બહારનો ખૂણો अडब માંહેલા ખૂણા डकब એટલે अकब કરતાં મ્હોટો છે;

માટે अबड ખૂણો પણ अकब ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે;

ત્યારે अबक ખૂણો તો अकब ખૂણા કરતાં ઘણો મ્હોટો હોવો જોઈએ.

માટે કોઈ પણ ત્રિકોણમાં જો એક બાજૂ ઇ૦ प्र.सि.

પ્રશ્ન.

(૧) ન્હાની બાજૂ अब વધારીને अक જેટલી બનાવીને આ સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

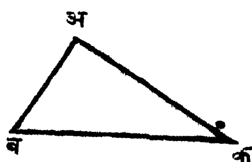
(૨) આ સિદ્ધાંતની મદદથી છઠ્ઠો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૩) એક ચતુષ્કોણાકૃતિમાં ચારેમાં મ્હોટી અને ચારેમાં ન્હાની બાજૂઓ એકબીજાની સામે હોય, તો એવું બતાવો કે તે ન્હાની બાજૂ ઉપરનો પ્રત્યેક ખૂણો તેના સામેના ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે.

સિદ્ધાંત ૧૯. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો કોઈ ત્રિકોણમાં એક ખૂણો બીજા કરતાં મ્હોટો હોય તો મ્હોટા ખૂણાની સામેની બાજૂ ન્હાના ખૂણાની સામેની બાજૂ કરતાં મ્હોટી થશે.

સાધન.



ધારો કે अबक ત્રિકોણમાં अबक ખૂણો अकब ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે.

તો अक બાજૂ अब બાજૂ કરતાં મ્હોટી થશે.

સિદ્ધતા.

કેમકે જો अक બાજૂ अब કરતાં મ્હોટી ન હોય, તો अक બાજૂ अबની બરોબર હોય અથવા अब કરતાં ન્હાની હોય.

પણ अक બાજૂ अबની બરોબર તો હોઈ ન શકે; કારણ કે તેમ હોય તો अबक અને अकब ખૂણા બરોબર થાય. (૧.૫)

પણ તે ખૂણાઓ કાંઈ બરોબર નથી; (પ્રતિ.)

વળી अक બાજૂ अब કરતાં ન્હાની પણ હોઈ ન શકે; કારણ કે તેમ હોય તો अबक ખૂણો अकब કરતાં ન્હાનો થાય. (૧.૧૮)

પણ તેમ તો નથી. (પ્રતિ.)

માટે अक લીટી अब ની બરોબર પણ નથી અને તેથી ન્હાની પણ નથી;

એટલે अक બાજૂ अब કરતાં મ્હોટી છે.

માટે જો કોઈ ત્રિકોણમાં એક ખૂણો ૯૦ प्र. सि.

ટીપઃ—૧૮ મા તથા ૧૯ મા સિદ્ધાંતમાં પેહેલો કયો અને બીજો કયો એ સ્મરણમાં રાખવું મુશ્કિલ લાગેછે માટે યાદ રાખવું કે ૧૮ મો ૫ મા પ્રમાણે છે અને ૧૯ મો ૬ ઠ્ઠા પ્રમાણે છે.

પ્રશ્ન.

(૧) એક કાટખૂણ ત્રિકોણમાં કઈ બાજૂ સર્વથી મ્હોટી?

(૨) એક अबक સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણનો बक પાયો ड બિંદુ સુધી લંબાવીને अड લીટી દોરી; તો તે લીટી ત્રિકોણની સરખી બાજૂઓ કરતાં મ્હોટી થશે.

(૩) કોઈપણ ત્રિકોણની બે બાજૂઓ અસમાન હોય તો તે બાજૂઓ વચ્ચેના શિરોબિંદુથી સામી બાજૂના કોઈપણ બિંદુ સુધી દોરેલી લીટી તે બેમાંની મ્હોટી બાજૂ કરતાં ન્હાની હોવી જોઈએ.

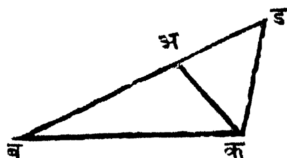
(૪) એક આપેલી લીટી ઉપર એક બહારના બિંદુથી જે લીટીઓ દોરિયે તેમાં જે લીટી આપેલી લીટી ઉપર લંબ હોય તે સૌથી ન્હાની; અને તે લંબની એકજ તરફની બીજી લીટીઓ લઈએ તો જે લીટી લંબની વધારે પાસે તે લીટી વધારે દૂરની લીટી કરતાં ન્હાની; અને આપેલા બિંદુમાંથી બબેજ લીટી લંબની દરેક બાજૂએ સરખી દોરી શકાય.

સિદ્ધાંત ૨૦. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક ત્રિકોણની કોઈપણ બે બાજૂઓ મળીને ત્રીજી કરતાં મ્હોટી છે.

સાધન.

ધારો કે અबक આપેલો ત્રિકોણ છે; તો તેની કોઈપણ બે બાજુ મળીને ત્રીજી કરતાં મ્હોટી થશે;



એટલે बअ, अक મળીને कब કરતાં મ્હોટી,

अक, कब મળીને अब કરતાં મ્હોટી,

અને कब, बअ મળીને अक કરતાં મ્હોટી.

રચના.

बअ લીટી લંબાવીને, બહારનો अड ભાગ अक બરોબર કરો; (૧.૩).

અને डक સાંધો.

સિદ્ધતા.

अडक ત્રિકોણમાં अड બાજુ अक ની બરોબર છે, (રચ.)

માટે अकड ખુણો अडक ખુણાની બરોબર છે. (૧.૫)

પણ बकड ખુણો अकड ખુણા કરતાં મ્હોટો છે. (પ્ર.પ્ર.૯)

માટે बकड ખુણો अडक એટલે बडक ખુણા કરતાં પણ મ્હોટો છે.

વળી बकड ત્રિકોણમાં,

बकड ખુણો बडक ખુણા કરતાં મ્હોટો હોય,

તો बड બાજુ बक કરતાં મ્હોટી થવી જોઈયે. (૧.૧૯)

માટે, बड લીટી એટલે बअ અને अड મળીને बक કરતાં મ્હોટી;

પણ अड લીટી તો अकની બરોબર છે. (રચ.)

માટે बअ અને अक મળીને बक કરતાં મ્હોટી છે.

એજ પ્રમાણે अक, कब મળીને अब કરતાં મ્હોટી,

અને કब, बअ મળીને अक કરતાં મ્હોટી છે એમ સિદ્ધ કરી શકાય.

માટે એક ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓ ઇ० प्र.सि.

પ્રશ્ન.

(૧) આ સિદ્ધાંત अ ખૂણો દુભાગવાથી સિદ્ધ કરો.

(૨) તેમજ अ ખૂણામાંથી પાયા ઉપર લંબ દોરવાથી સિદ્ધ કરો.

(૩) કોઈપણ બે બાજૂની બાદબાકી ત્રિજી બાજૂ કરતાં ન્હાની છે.

(૪) બે બિંદુઓ વચ્ચે ટુંકામાં ટુંકો અન્તર એક સીધી લીટી છે.

(૫) જો એક ચતુષ્કોણાકૃતિની સામસામેની બાજૂઓ લંબાવતાં મળી જાય તો આખા ત્રિકોણની પરિમિતિ તે ચતુષ્કોણની પરિમિતિ કરતાં વધારે હોવી જોઈએ.

(૬) એક ત્રિકોણમાં કોઈપણ બિંદુ લઈને તેને ત્રણે ખૂણાઓ સાથે સાંધ્યું હોય તો સાંધનારી લીટીઓ મળીને ત્રિકોણની પરિમિતિના અડધ કરતાં વધારે થશે.

(૭) એક ચતુષ્કોણાકૃતિની પરિમિતિ તેની બે કર્ણોના સર્વાળા કરતાં વધારે છે.

(૮) બહુકોણાકૃતિમાં એક બિંદુ લઈને બધા ખૂણાઓ સાથે સાંધ્યું હોય તો સાંધનારી લીટીઓ મળીને તે આકૃતિની પરિમિતિના અડધ કરતાં વધારે થશે.

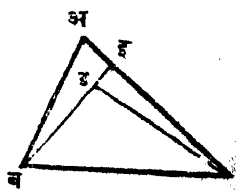
(૯) ત્રિકોણની એક બાજૂને દુભાગનારા બિંદુથી સામા ખૂણા સૂધી દોરેલી લીટીની બમણાઈ કરતાં તે ત્રિકોણનો બે બાજૂનો સર્વાળો વધારે છે.

સિદ્ધાંત ૨૧. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો એક ત્રિકોણની એક બાજૂના છેડાઓ-

માંથી તે ત્રિકોણની અંદરના એક બિંદુ સુધી બે લી- ટીઓ દોરિયે, તો તે લીટીઓ ત્રિકોણની બીજી બે બા- જૂઓ કરતાં ઓછી થશે, પણ તેઓની વચ્ચેનો ખૂણો તે બાજૂઓની વચ્ચેના ખૂણા કરતાં મ્હોટો થશે.

સાધન.



अबक એક ત્રિકોણ છે; તેની बक બાજૂના ब અને क છેડાઓમાંથી તે ત્રિકોણની અંદરના ड બિંદુ સુધી बड, અને कड લીટીઓ દોરો;

તો (૧) बड અને कड મળીને बअ અને अक કર- તાં ઓછી થશે;

(૨) बडक ખૂણો बअक ખૂણા કરતાં મ્હોટો થશે.

રચના.

बड ને લંબાવીને अक લીટીને इ બિંદુમાં છેદવા દો.

સિદ્ધતા.

(૧) बअइ ત્રિકોણમાં बअ અને अइ મળીને बइ કરતાં મ્હોટી છે. (૧. ૨૦.)

એ પ્રત્યેકમાં इक ઉમેરો;

ત્યારે बअ, અને अक લીટી बइ અને इक કરતાં મ્હોટી થઈ. (પ્ર. પ્ર. ૪)

વળી डइक ત્રિકોણમાં डइ અને इक બાજૂઓ डक કરતાં મ્હોટી છે. (૧. ૨૦)

એ પ્રત્યેકમાં बड ઉમેરો;

ત્યારે बइ અને इक લીટીઓ बड અને डक કરતાં મ્હોટી છે. (પ્ર. પ્ર. ૪)

પણ ઉપર બતાવ્યું કે बभ અને अक લીટીઓ बइ અને इक કરતાં મ્હોટી છે.

માટે बभ અને अक બાજુઓ बड અને डक કરતાં તો વધારે મ્હોટી થઈ.

(૨) વળી, डइक ત્રિકોણનો બહારનો ખૂણો बडक માંહેલા સામેના डइक કરતાં મ્હોટો છે. (૧. ૧૬)

અને बअइ ત્રિકોણનો બહારનો ખૂણો डइक માંહેલા સામેના ખૂણા बअइ એટલે बअक કરતાં મ્હોટો છે. (૧. ૧૬)

માટે बडक ખૂણો बभक કરતાં વધારે મ્હોટો થયો.

માટે જો એક ત્રિકોણની એક બાજુના ઇ० प्र. सि.

પ્રશ્ન.

(૧) આ સિદ્ધાંતનો બીજો ભાગ अड લીટી સાંધીને પાયા સુધી વધારીને સિદ્ધ કરો.

(૨) એક ત્રિકોણમાં એક બિંદુ લઈને તેને પ્રત્યેક ખૂણા-સાથે જોડવાથી જે ત્રણ લીટીઓ થશે તેઓ બધી મળીને ત્રિકોણની ત્રણ બાજુ કરતાં ઓછી થશે.

(૩) આપેલું બિંદુ ત્રિકોણની એક બાજુમાંજ લઈને આ સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

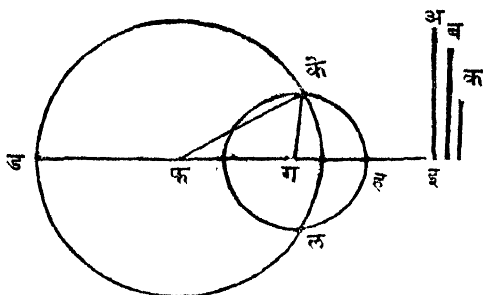
સિદ્ધાંત ૨૨. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક એવો ત્રિકોણ કરવો કે તેની બાજુઓ અનુક્રમે આપેલી ત્રણ લીટીઓની બરોબર થાય; જે આપેલી લીટીઓ માંહેલી કોઈપણ બે મળીને ત્રીજી કરતાં મ્હોટી છે.

સાધન.

ધારો કે अ, ब, क, આપેલી ત્રણ લીટીઓ છે;

જેમાંની કોઈપણ બે મળીને ત્રીજી કરતાં મ્હોટી છે; એટલે अ અને ब મળીને क કરતાં મ્હોટી,



अ અને क મળીને ब કરતાં મ્હોટી,

અને ब ને क મળીને अ કરતાં મ્હોટી;

તો એક એવો ત્રિકોણ બનાવવાનો છે કે જેની ત્રણે બાજૂઓ અનુક્રમે अ, ब, અને क ની બરોબર હોય.

રચના.

એક डइ સીધી લીટી દોરો; એવી કે ड બિંદુ આગળ સમર્યાદ એટલે હદ થયલી હોય અને इ બિંદુ તરફ લંબાવી શકાય.

પછી डफ ભાગ अ લીટી બરોબર,

फग ભાગ ब લીટી બરોબર,

અને गह ભાગ क લીટી બરોબર કાપો. (૧. ૩)

फ બિંદુને મધ્યબિંદુ લઈને અને फड જેટલી ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુલ डलके દોરો. (સ્વી. ૩)

ग મધ્યબિંદુ અને गह ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુલ लहके દોરો. (સ્વી. ૩)

એ બે વર્તુલો के અને ल બિંદુઓમાં છેદે છે.

फके, અને गके સાંધો. (સ્વી. ૧)
તો केफग માગેલો ત્રિકોણ થશે.

સિધ્ધતા.

इलके વર્તુલનું फ મધ્યબિંદુ છે,
માટે फके લીટી फड ની બરોબર છે; (વ્યાખ્યા ૧૫)
પણ फड લીટી તો अ લીટીની બરોબર છે;
માટે फके લીટી પણ अ લીટીની બરોબર છે. (પ્ર.પ્ર.૧)
વળી, हलके વર્તુલનું ग મધ્યબિંદુ છે,
માટે गके લીટી गह ની બરોબર છે. (વ્યા. ૧૫)
પણ गह લીટી क લીટીની બરોબર છે;
માટે गके લીટી પણ क લીટીની બરોબર છે. (પ્ર.પ્ર. ૧)
અને फग લીટી ब લીટીની બરોબર છે; (રચના)
માટે केफग એવો ત્રિકોણ થયો કે તેની ત્રણ બાજુઓ केफ, फग અને गके અનુક્રમે આપેલી લીટીઓ अ, ब, क ની બરોબર છે. कृ. कृ.

ટીપઃ—સહજ વિચાર કરતાં અને બરોબર આકૃતિ કહાડતાં જણાશે કે જે શરત પ્રતિજ્ઞામાં આપી છે તે આપી ન હોત તો જે બે વર્તુલો દોરાયા તે અવશ્ય એકેકને છેદત નહિ; કદાચ એક વર્તુલ બીજાની અંદર પડત, અથવા બિલકુલ બહાર પડત. પણ આપેલી શરત પ્રમાણે તો છેદવા જોઈએ જ, અને ન છેદે એ અસંભવિત છે, તે ઉપર કહેલી બે આકૃતિઓ જૂદી જૂદી દોરવાથી સહજ સાબિત થઈ શકશે.

પ્રશ્ન.

(૧) આપેલા પાયા ઉપર એક એવો ત્રિકોણ દોરો કે તેની બે બાજુઓ આપેલી બે લીટીઓની બરોબર હોય.

(૨) પ્રતિજ્ઞામાં જે શરતો આપી છે તેનું કારણ શું?

(૩) બન્ને વર્તુલો પરસ્પર છેદવા જોઈએજ એવું સિદ્ધ કરો.

(૪) સિદ્ધાંતમાં જે અનુક્રમે બાજૂઓ આપેલી લીટીની બરોબર છે, તેથી જૂદે અનુક્રમે બરોબર થાય એવો ત્રિકોણ દોરો.

(૫) આપેલી ત્રણ લીટીઓ માંહેલી क લીટી, अ અને ब ના સર્વાળા બરોબર હોય તો આકૃતિ કેવી થશે? તેમ હોય તો ત્રિકોણ થાય કે નહિ.

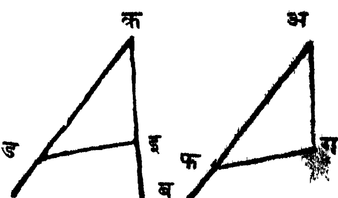
(૬) આ સિદ્ધાંત અને પહેલા સિદ્ધાંત વચ્ચે કેટલો સંબંધ છે.

સિદ્ધાંત ૨૩. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક આપેલી સીધી લીટીમાંના એક આપેલા બિંદુ પાસેથી એક એવો ખૂણો કરવો કે તે એક આપેલા ખૂણાની બરોબર થાય.

સાધન.

ધારો કે अब આપેલી સીધી લીટી છે, અને अ તેમાં આપેલું બિંદુ છે; અને डकइ આપેલો ખૂણો છે. તો अ બિંદુમાંથી એક એવી લીટી દોરવી છે કે તે લીટી આપેલી अब લીટીની સાથે डकइ ખૂણા જેટલો એક ખૂણો કરે.



રચના.

कड, कइ લીટીઓમાં કોઈ પણ ड અને इ એવાં બે

બિંદુઓ લો; અને ડઇ લીટી દોરો.

અબ લીટીમાંથી અફ ભાગ કડ જેટલો કાપો. (૧. ૩)

અને અફ લીટી ઉપર એક અફગ ત્રિકોણ એવો દોરો કે તેની અગ, ગફ બાજૂઓ અનુક્રમે કઇ, ઇડ ની બરોબર થાય. (૧. ૨૨)

ત્યારે ફઅગ ખૂણો ડકઇ ખૂણાની બરોબર થશે.

સિદ્ધતા.

ફઅગ, ડકઇ ત્રિકોણોમાં,

ફઅ બાજૂ ડકની બરોબર છે, (રચ.)
અગ બાજૂ કઇની બરોબર છે, (રચ.)
અને ફગ પાયો ડઇની બરોબર છે, (રચ.)

માટે, ફઅગ ત્રિકોણ ડકઇની બરોબર છે. (૧. ૮)

માટે, ફઅગ ખૂણો પણ ડકઇ ખૂણાની બરોબર છે; એટલે અબ લીટીના અ બિંદુમાંથી અગ લીટી એવી દોરી કે તે આપેલી અબ લીટીની સાથે આપેલા ખૂણા જેટલો ખૂણો કરે છે. કૃ. કૃ.

પ્રશ્નો.

(૧) એવું બતાવો કે ૧૧ મો સિદ્ધાંત આ સિદ્ધાંતનો એક પ્રકાર છે.

(૨) રચનામાં ૨૨ મા સિદ્ધાંતની મદદથી જે ત્રિકોણ દોર્યો છે તેની આખી આકૃતિ આપો.

(૩) બે આપેલા ખૂણાના સર્વાળા જેટલો એક ખૂણો કરો.

(૪) બે આપેલા ખૂણાની બાદબાકી જેટલો એક ખૂણો કરો.

સિદ્ધાંત ૨૪. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજૂઓ

અનુક્રમે બીજાની બે બાજૂઓની બરોબર હોય, પણ તે સરખી બાજૂઓની વચ્ચેનો એકનો ખૂણો બીજાના ખૂણા કરતાં મ્હોટો હોય, તો જે ત્રિકોણમાં મ્હોટો ખૂણો છે તે ત્રિકોણનો પાયો (એટલે તે મ્હોટાખૂણાની સામેની બાજૂ) બીજા ત્રિકોણના પાયા કરતાં મ્હોટો થશે.

સાધન.

अबक, डइफ બે ત્રિકોણો છે, જેમાંની बअ, अक બાજૂઓ અનુક્રમે इड, डफ બાજૂઓની બરોબર છે; પણ बअक ખૂણો इडफ ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે; ત્યારે

बक પાયો इफ કરતાં મ્હોટો થશે.

डइ અને डफ લીટીઓમાં, डइ લીટી डफ કરતાં મ્હોટી નથી એમ ધારો. (એ વિશે ટીપ જુઓ).

રચના.

डइ લીટીમાં ड બિંદુ આગળ डफ જે દિશાએ પડે છે તે તરફ इडग ખૂણો बअक ખૂણા બરોબર કરો. (૧.૨૩)

डग ભાગ डफ અથવા अक બરોબર કરો. (૧.૩)

इग, गफ સાંધો.

સિદ્ધતા.

बअक અને इडग ત્રિકોણોમાં,

{ बअ લીટી इड ની બરોબર છે, (પ્રતિ.)
અને अक લીટીडग ની બરોબર છે. (રચ.)
અને અંતર્ખૂણો बअक અન્તર્ખૂણા इडग ની બરોબર છે. (રચ.) }

માટે, बभक ત્રિકોણ સર્વ પ્રકારે इडग ત્રિકોણની બરોબર છે. (૧. ૪).

અને, તેથી बक પાયો इग પાયાની બરોબર છે.

વળી फडग ત્રિકોણમાં,

डग લીટી डफ ની બરોબર છે,

માટે डफग ખૂણો डगफ ખૂણાની બરોબર છે. (૧.૫).

પણ डगफ ખૂણો તો इगफ ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે,

માટે डफग ખૂણો પણ इगफ ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે;

ત્યારે इफग ખૂણો તો इगफ ખૂણા કરતાં ઘણો મ્હોટો થયો.

માટે इग બાજૂ इफ બાજૂ કરતાં મ્હોટી થઇ. (૧. ૧૯)

પણ इग તો बक ની બરોબર સાબિત કીધી છે;

માટે बक પાયો इफ પાયા કરતાં મ્હોટો છે.

માટે જો બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજૂઓ ઇ૦ प्र.सि.

ટીપઃ—(૧) ઉપલી સિદ્ધતામાં એવી શરત કીધી છે કે डइ લીટી डफ કરતાં મ્હોટી નથી; એ શરત અગત્યની છે, અને જો એ શરત પહેલાંથી કીધી ન હોય તો રચનામાં ત્રણ જૂદી જૂદી આકૃતિઓ થઈ શકે; કારણ કે फ બિંદુ इग લીટી ઉપરજ પડે, અથવા તે લીટીની ઉપરની બાજૂએ પડે, અથવા તેની નીચેની બાજૂએ પડે. આ આકૃતિમાં फ બિંદુ इग લીટીની નીચેજ પડેછે તેનું કારણ ઉપલી શરત છે. ત્યારે હવે એ સિદ્ધ કરવાનું રહ્યું કે જો डइ લીટી डफ કરતાં મ્હોટી ન હોય તો फ બિંદુ इग લીટીની નીચેજ પડશે.

કારણ કે ધારો કે इग, डफ લીટીઓ क्ष બિંદુમાં છેદેછે;

હવે डइ લીટી डफ કરતાં મ્હોટી નથી,

માટે डइ લીટી डग કરતાં પણ મ્હોટી નથી;

માટે डगइ ખૂણો डइग ખૂણા કરતાં પણ મ્હોટો નથી. (૧.૧૮)

પણ, બહારનો ખૂણો डखग માંહેલા ખૂણા डइख કરતાં મ્હોટો છે; (૧.૧૬).

માટે डखग ખૂણો डगख ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે.

માટે डग લીટી डख કરતાં મ્હોટી છે;

માટે डफ લીટી પણ डख કરતાં મ્હોટી છે.

એટલે फ બિંદુ इग લીટીની નીચે પડવું જોઈએ.

ટીપઃ—(૨) જો डइ લીટી डफ કરતાં મ્હોટી હોય તો એમ નહિ ધારવું કે આ સિદ્ધાંત થઈ શકે નહિ; કારણ કે જો તેમ હોય તો માત્ર આકૃતિરચનામાં ફેર થશે. તે એ કે ड બિંદુ આગળ बभक ખૂણાની બરોબર જે ખૂણો કરીશું તે જે દિશાએ डफ લીટી પડેછે તે દિશાએ ન કરતાં જે દિશાએ डइ પડેછે તે દિશાએ डफ લીટી ઉપર કરીશું.

પ્રશ્નો.

(૧) જો फ બિંદુ इग લીટીની નીચે પડે તો બતાવો કે इड લીટી इफ લીટી કરતાં મ્હોટી હોય નહિ.

(૨) "डइ લીટી डफ કરતાં મ્હોટી નથી" એ શબ્દોનો અર્થ શો?

(૩) જો ઉપલી શરત ન લખી હોય તો જે ત્રણ પ્રકારો થાય તે જૂદા જૂદા સિદ્ધ કરો.

(૪) સ્થાનોપરીની રીતિ ઉપલો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

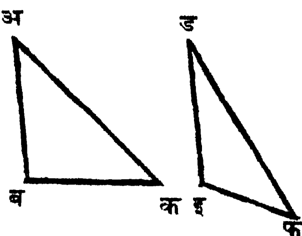
સિદ્ધાંત ૨૫. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજૂઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજૂઓની બરોબર હોય, પણ એકનો પાયો બીજાના પાયા કરતાં મ્હોટો હોય, તો મ્હોટા પાયાવાળા ત્રિકોણની સરખી બાજૂઓ વચ્ચેનો

અન્તર્ખૂણો બીજા ત્રિકોણના અન્તર્ખૂણા કરતાં મ્હોટો થશે.

સાધન.

अबक અને डइफ બે એવા ત્રિકોણો છે કે એકની अब અને अक બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની डइ અને डफ બાજુઓની બરોબર છે; પણ बक પાયો इफ પાયા કરતાં મ્હોટો છે;



તો बअक ખૂણો इडफ ખૂણા કરતાં મ્હોટો થશે.

સિદ્ધતા.

કેમકે, જો बअक ખૂણો इडफ ખૂણા કરતાં મ્હોટો ન હોય તો તે इडफ ની બરોબર હોવો જોઇએ અથવા તેથી ન્હાનો હોવો જોઇએ.

પણ बअक ખૂણો इडफ ની બરોબર તો નથીજ;

કારણ કે, તેમ હોય તો बक પાયો इफની બરોબર થાય. (૧. ૪)

પણ તેમ નથી; (પ્રતિ.)

વળી, बअक ખૂણો इडफ ખૂણા કરતાં ન્હાનો પણ નથી,

કેમકે તેમ હોય તો बक પાયો इफ કરતાં ન્હાનો થાય. (૧. ૨૪)

પણ તેમ નથી. (પ્રતિ.)

માટે बअक ખૂણો इडफ ની બરોબર નથી, અને તેથી ન્હાનો પણ નથી;

એટલે, बअक ખૂણો इडफ ખૂણા કરતાં મ્હોટો છે.

માટે જો બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજૂઓ ઇ૦ प्र. सि.

ટીપઃ—આ સિદ્ધાંત ૨૪ માનો વ્યત્યાસ છે; અને એની સિદ્ધતા પણ ઉલટીજ છે; જેવો સંબંધ સિ. ૫ અને ૬ ને છે, તેવો સિ. ૨૪ અને ૨૫ ને છે. ૬ઠ્ઠા સિદ્ધાંતની સમજણ જૂઓ.

ટીપઃ—જે પ્રમાણે અઢારમા અને ઓગણીસમા સિદ્ધાંતો પાંચમા અને છઠ્ઠાને મળતા છે. તેજ પ્રમાણે ચોવીસમા તથા પચીસમા, ચોથા અને આઠમાને મળતા છે. એકજ પ્રતિજ્ઞામાં ચોથા અને ચોવીસમા સિદ્ધાંતો નીચે પ્રમાણે લખાય.

જો બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજૂઓ બીજાની બે બાજૂઓની અનુક્રમે બરોબર હોય, તો જે પ્રમાણે એક ત્રિકોણની બાકીની બાજૂની સામેનો ખૂણો, બીજા ત્રિકોણની બાકીની બાજૂની સામેના ખૂણા કરતાં મ્હોટો, ન્હાનો અથવા તેની બરોબર હોય, તે પ્રમાણે એકની બાકીની બાજુ, બીજાની બાકીની બાજૂ કરતાં મ્હોટી, ન્હાની અથવા તેની બરોબર થશે.

પ્રશ્ન.

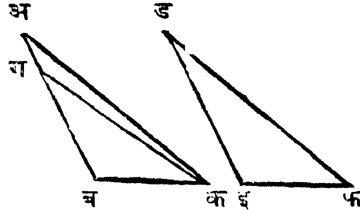
अबक ત્રિકોણનું अ શિરોબિંદુ, बक પાયાના क्ष મધ્યબિંદુ સાથે સાંધ્યું; તો अब લીટી अक કરતાં મ્હોટી અથવા ન્હાની હોય તે પ્રમાણે अक्षब ખૂણો પહોળો અથવા સાંકડો ખૂણો થશે.

સિદ્ધાંત ૨૬. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના બે ખૂણાઓની બરોબર હોય, અને (૧) તે સરખા ખૂણાઓની વચ્ચે રહેલી બાજૂ બન્ને ત્રિકોણમાં સરખી હોય, અથવા (૨) ગમે તે સરખા ખૂણાઓની સામેની એકેક બાજૂ સરખી હોય, તો બાકીની બાજૂઓ અનુક્રમે એક બીજીની બરો-

બર થશે, અને બાકી રહેલા ખૂણાઓ પણ બરોબર થશે.

સાધન.



પહેલો ભાગઃ— ધારો કે સરખા ખૂણાઓની વચ્ચે આપેલી બાજુ બન્ને ત્રિકોણમાં સરખી છે.

ધારો કે अबक, डइफ બે એવા ત્રિકોણો છે, કે अबक ખૂણો डइफ ની બરોબર છે, અને अकब ખૂણો डफइ ની બરોબર છે; અને बक બાજૂ इफ ની બરોબર છે;

તો अबक અને डइफ ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે એકેકની બરોબર થશે;

એટલે, अब બાજૂ डइની બરોબર થશે, અને अक બાજૂ डफની બરોબર થશે; અને बअक ખૂણો इडफ ખૂણાની બરોબર થશે.

કેમકે જો अब બાજૂ डइની બરોબર ન હોય, તો તે-માંની એક બીજી કરતાં મ્હોટી હોવી જોઈએ.

જો એમ બની શકે તો ધારો કે अब બાજૂ डइ કરતાં મ્હોટી છે.

રચના.

बअ લીટીમાંથી बग ભાગ इड બરોબર કાપો. (૧. ૩)

અને गक લીટી દોરો. (સ્વી. ૧)

સિદ્ધતા.

गबक, डइफ ત્રિકોણોમાં,

गब બાજુ डइની બરોબર છે, (રચ.)
અને बक, इफની બરોબર છે, (પ્રતિ.)
અને અન્તર્ખૂણો गबक, डइफ અન્તર્ખૂણાની બરોબર છે,

માટે એ બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર છે, (૧. ૪)
માટે गकब ખૂણો डफइ ખૂણાની બરોબર છે.
પણ अकब ખૂણો डफइ ખૂણાની બરોબર છે, (પ્રતિ.)
માટે गकब ખૂણો अकब ખૂણાની પણ બરોબર છે; (પ્ર. પ્ર. ૧)
એક ભાગ તેના આખાની બરોબર;
એ અસંભવિત છે. (પ્ર પ્ર ૯)
માટે अब બાજુ डइ કરતાં મ્હોટી નથી.

એજ પ્રમાણે સિદ્ધ થઈ શકે કે डइ બાજુ अब કરતાં મ્હોટી નથી;

એટલે अब બાજુ डइની બરોબર છે.
માટે अबक અને डइफ ત્રિકોણોમાં,
अब બાજુ डइ ની બરોબર છે, (સાબિત કીધું)
અને बक બાજુ इफ ની બરોબર છે, (પ્રતિ.)
અને અન્તર્ખૂણા अबक, डइफ બરોબર છે.
માટે એ બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે. (૧. ૪)
એટલે अक બાજુ डफ ની બરોબર છે,
અને बअक ખૂણો इडफ ખૂણાની બરોબર છે.

બીજો ભાગઃ—ધારો કે ત્રિકોણોમાં કોઈપણ બે સરખા ખૂણાની સામેની એકેક બાજુ સરખી આપી છે.

ધારો કે अबक ખૂણો डइफ ખૂણાની બરોબર છે, અને अकब, डफइ ની બરોબર છે, અને अब બાજુ डइ બાજુની બરોબર છે,

તો अबक અને डइफ ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા થશે.

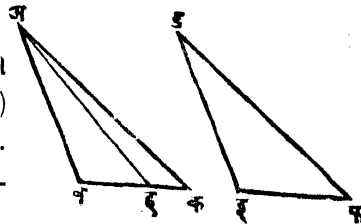
એટલે बक બાજૂ इफ ની બરોબર, અને अक, डफ ની બરોબર થશે.

અને बअक ખૂણો इडफ ખૂણાની બરોબર થશે.

જો बक બાજૂ इफ બરોબર ન હોય, તો એમાંની એક બીજી કરતાં મ્હોટી હોવી જોઇયે.

જો એમ બની શકે તો, ધારો કે बक બાજૂ इफ કરતાં મ્હોટી છે.

રચના.



बक માંથી बह ભાગ इफ જેટલો કાપો, (૧. ૩)

અને अह લીટી દોરો.

તો, अबह, डइफ, ત્રિકોણોમાં,

અब બાજૂ डइ ની બરોબર છે,
અને बह, इफ ની બરોબર છે,
અને અન્તર્ખૂણા अबह, डइफ સરખા છે;

માટે એ બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે. (૧. ૪)

માટે अहब ખૂણો डफइ ખૂણાની બરોબર છે.

પણ डफइ ખૂણો તો अकब ખૂણાની બરોબર છે. (પ્રતિ.)

માટે अहब ખૂણો अकब ખૂણાની બરોબર છે. (પ્ર. ૧)

એટલે अकह ત્રિકોણનો એક બહારનો ખૂણો તે ત્રિકોણના અંદરના સામેના ખૂણાની બરોબર છે, એ અશક્ય છે. (૧. ૧૬)

માટે बक બાજૂ इफ કરતાં મ્હોટી નથી;

તેમજ इफ, बक કરતાં મ્હોટી નથી એમ સાબિત થઈ શકે;

માટે એ બે બાજૂઓ સરખી છે.

ત્યારે अबक, डइफ ત્રિકોણોમાં,

अब બાજૂ डइनी બરોબર છે,
અને बक, इफनी બરોબર છે,
અને अबक, डइफ અન્તર્ખૂણા સરખા છે;

માટે એ બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે. (૧. ૪)

માટે अक બાજૂ डफनी બરોબર છે,

અને बअक ખૂણો इडफ ખૂણાની બરોબર છે.

માટે જો એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ ૯૦. प्र. सि.

ટીપ (૧):— બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર, એટલે ત્રણે બાજૂઓ પણ અનુક્રમે સરખી અને ત્રણે ખૂણાઓ પણ અનુક્રમે સરખા ક્યારે હોય તે જોવું જોઈએ:—

(૧) સિદ્ધાંત ૪ પ્રમાણે; એટલે બન્ને ત્રિકોણની બે બાજૂઓ અને અન્તર્ખૂણા સરખા હોય તો,

(૨) સિદ્ધાંત ૮ પ્રમાણે; એટલે બન્ને ત્રિકોણોની ત્રણ બાજૂઓ અનુક્રમે સરખી હોય તો,

(૩) સિદ્ધાંત ૨૬ પ્રમાણે; એટલે બબ્બે ખૂણા સરખા હોય, અને

(ક) તે સરખા ખૂણાઓની વચ્ચે આવેલી બાજૂઓ સરખી હોય,

અથવા (ખ) બે સરખા ખૂણાની સામેની બે બાજૂઓ સરખી હોય તો.

એટલે, ઘણું કરીને છ પરિમિતો (ત્રણ બાજૂ અને ત્રણ ખૂણા)-માંથી ત્રણ સરખાં આપ્યાં હોય તો બીજાં ત્રણ સરખાં થશે.

પણ નીચે લખેલા બે પ્રકારો એવા છે કે તેમાં ત્રણ પરિમિતો સરખાં આપેલાં છતાં બીજાં ત્રણ અવશ્ય સરખાંજ હોવાં જોઈએ એમ નથી.

(૧) જો એક ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાએ અનુક્રમે બીજાના ત્રણ ખૂણાઓની બરોબર હોય,

(૨) જો એક ત્રિકોણની બે બાજૂએ અનુક્રમે બીજાની બે બાજૂઓની બરોબર હોય, અને અન્તર્ખૂણા નહિ, પણ કોઈ બીજા બે ખૂણા બરોબર હોય.

આ છ પરિમિતોમાંથી ત્રણ સરખાં આપ્યાં હોય, ને તે ઉપરથી બાકીનાં ત્રણ સરખાં સિદ્ધ કરવાં હોય તો ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણે છ પ્રકાર થાય; તેમાંના ચાર ખરા છે. (સિદ્ધાંત ૪-૮-૨૬ના બે ભાગ); અને બે અવશ્ય ખરા નથી; એટલે તે બે પ્રકારોમાં બાકીનાં ત્રણ પરિમિતો સરખાં થાય કિંવા નએ થાય; અને તે બે પ્રકારો ઉપર લખ્યા તે છે.

સર્વ પ્રકારે સરખા ત્રિકોણો હોય ત્યારે તે ત્રિકોણો સ્થાનોપરી થઈ શકે; માટે તેઓનું ક્ષેત્રફળ પણ સરખુંજ થાય.

ટીપ (૨):—ઉપર જે બે પ્રકારો બાદ કીધા છે તેમાંના બીજાને માટે એક નવી શર્ત વધારિયે તો ત્રિકોણો સરખા થશે.

તે શર્ત શી છે તે નીચેનો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવાથી જણાશે.

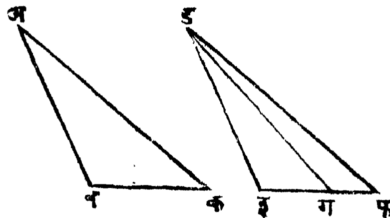
જો બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજૂઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજૂઓની બરોબર હોય, અને બરોબર બાજૂઓની એક જોડની સામેના ખૂણાઓ બરોબર હોય, તો બીજી બરોબર બાજૂની સામેના ખૂણાઓ બરોબર અથવા ન્યૂનતાપૂરક થશે.

ધારો કે अब=डइ

અને अक=डफ,

અને <अबक = <डइफ;

તો <क અને <फ ન્યુનતાપૂરક થશે.



હવે જો <अ=<ड હોય, તો તો <क=<फ થશે.

અને ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા થશે.

પણ જો <अ, <ड ની બરોબર ન હોય તો ધારો કે ड મ્હોટો છે;

તેમાંથી इडग ભાગ <अ બરોબર કરો. (૧.૨૩.)

તો <अ= <इडग (રચ.) અને <ब=इ (પ્રતિ.)

અને अब = डइ (પ્રતિ.)

માટે (૧.૨૬) अबक ત્રિકોણ સર્વ પ્રકારે डइग ત્રિકોણની બરોબર છે.

∴ <क=<डगइ, અને अक=डग;

પણ अक=डफ (પ્રતિ.) ∴डग=डफ ∴ <डगफ=<फ.

પણ ग આગળના બે ખુણા એકેકના ન્યુનતાપૂરક છે. (૧.૧૩)

અને તેમાંનો એક=<क, અને બીજો =<फ

∴ <क અને <फ ન્યુનતાપૂરક છે. प्र. सि.

ટીપ(૩):—માટે જો બબે બાજૂઓ અનુક્રમે સરખી હોય અને એક જોડની સામેના ખૂણા સરખા હોય તો,

(૧) બાકીની સરખી બાજૂની સામેના ખૂણાઓમાંનો એક કાટખૂણ હોય, અથવા

(૨) તે બાજૂઓની સામેના ખૂણા બન્ને સાંકડા હોય, અથવા

(૩) તે બાજુઓની સામેના ખૂણા બન્ને પહોળા હોય તો બન્ને ત્રિકોણો સરખાજ થશે. કારણ, જો એક કાટખૂણ હોય તો તેના સરખો તેમજ તેનો ન્યૂનતાપૂરક પણ કાટખૂણજ; માટે તે રહેલા ખૂણા સરખાજ થયા; માટે ત્રિકોણો પણ સરખાજ.

જો બન્ને પહોળા અથવા સાંકડા હોય તો તો એકેકના ન્યૂનતાપૂરક તો થઈ શકે નહિ; માટે તે સરખાજ હોવા જોઈએ; એટલે ત્રિકોણો પણ સરખાજ થયા.

પ્રશ્ન.

(૧) બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા ક્યારે ક્યારે હોય ?

(૨) જો બે ત્રિકોણોમાં બબ્બે બાજૂઓ બરોબર હોય, અને એક જોડની સામેના ખૂણા બરાબર હોય, તો ત્રિકોણો બરોબર ક્યારે થાય, અને ક્યારે ન થાય ?

(૩) બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર હોય તો તેઓનું ક્ષેત્રફળ બરોબર હોય કે નહિ ? જો બે ત્રિકોણોનું ક્ષેત્રફળ સરખું હોય તો તે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર છે કે નહિ ?

(૪) આ સિદ્ધાંતનો પુરાવો કેવા પ્રકારનો છે ? એને મળતો પુરાવો આગળ કયા સિદ્ધાંતોમાં આવી ગયો છે ?

પહેલા ૨૬ સિદ્ધાંતો ઉપરથી થતા પ્રશ્નો.

૧. પાંચમા સિદ્ધાંતમાં ધારો કે फक અને बग લીટીઓ ह બિંદુમાં છેદે છે; તો फह=गह.

૨. अब પાયાની એકજ દિશાએ अबक, अबड ત્રિકોણો છે; અને अक=बड છે, અને अड=बक છે; જો अड, बक લીટીઓ इ બિંદુમાં છેદે તો अइब ત્રિકોણ સમદ્વિબાજૂ થશે.

૩. જો બે કાટખૂણ ત્રિકોણોમાં એકનો કર્ણ તથા એક

બાજૂ અનુક્રમે બીજાના કર્ણ તથા એક બાજૂની બરોબર હોય તો ત્રિકોણો સરખાજ થશે. (ઉલટો પુરાવો.)

૪. એક ત્રિકોણ એવો બનાવો કે જેની બે બાજૂઓ અને અન્તર્ખૂણો આપેલી બે લીટી અને એક ખૂણાની અનુક્રમે બરોબર હોય.

૫. એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણના પાયાના છેડાના બિંદુઓ-માંથી સામી બાજૂ ઉપર લંબ દોરિયે તો તે સરખા થશે.

૬. એક ખૂણાને દુભાગનારી લીટીનું કોઈપણ બિંદુ તે ખૂણાની બાજૂઓથી સમાન્તર છે.

૭. એક લીટીના મધ્યબિંદુમાંથી તેને છેદે એવી બીજી લીટી દોરી; અને પહેલી લીટીના છેડાના બે બિંદુઓમાંથી તે બીજી લીટી ઉપર લંબ દોરીશું તો તે સરખા થશે.

૮. એક લીટીની એકજ દિશાએ બે બિંદુઓ આપેલાંછે, તેમાંથી બે લીટીઓ એવી દોરો કે આપેલી લીટીને એકજ બિંદુમાં મળે અને તેની સાથે સરખા ખૂણા કરે.

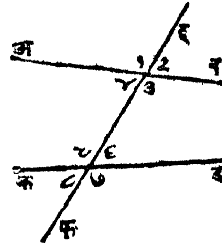
૯. એક આપેલી લીટીમાં એક એવું બિંદુ શોધી કહાડો કે બે એકેકને છેદતી લીટીઓથી સમાન્તરે હોય. એમ કરવું ક્યારે અસંભવિત છે?

૧૦. એક આપેલા બિંદુમાંથી એવી લીટી દોરો કે તેના ઉપર બે આપેલાં બિંદુઓમાંથી લંબ દોરિયે તે સરખા થાય. એમ કરવું ક્યારે અસંભવિત છે ?

આવતા સિદ્ધાંતોની સમજણ.

હવે પછી સિદ્ધાંતો મુખ્ય કરીને સમાન્તર લીટીઓને લ-ગતા તથા સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણને લગતા આવશે. એ બન્નેની વ્યાખ્યાઓ તો વ્યાખ્યા ૩૫-૩૬ માં આવી ગઈ છે.

જ્યારે એક લીટી, જેવીકિ **इफ** બે સીધા લીટીઓ, જેવીકિ **अब** અને **कड**, ની ઉપર પડેછે, ત્યારે આકૃતિમાં બતાવ્યા છે તે પ્રમાણે આઠ ખૂણાઓ થઈ શકે. એ ખૂણાઓનાં જુદાં જુદાં નામો આપવામાં આવ્યાં છે. તે યાદ રાખવાં.



૧,૨,૭,૮ ખુણા **બહારના** ખુણા કહેવાયછે.

૩,૪,૫,૬ ખુણા **માંહેના** ખુણા કહેવાયછે.

૪ અને ૬ ખુણા એકેકના **વ્યુત્ક્રમખુણા** કહેવાયછે, તેમજ ૩ અને ૫ ખુણા પણ એકેકના **વ્યુત્ક્રમ ખૂણા**.

૨ અને ૬ મરખાવિયે તો ૨ ને બહારનો અને ૬ ને **તેજ દિશા ઉપરનો માંહેના સામેનો** ખુણો કહેછે.

તેજ સંબંધ ૧ અને ૫ તથા ૪ અને ૮ તથા ૩ અને ૭ વચ્ચે છે.

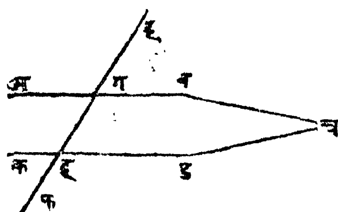
એટલે ૧ બહારનો ખુણો અને ૫ તેજ દિશા ઉપરનો માંહેનો સામેનો ખુણો; ઇત્યા.

સમાન્તર લીટીઓને લગતા સિદ્ધાંતોનો મુખ્ય આધાર ૧૨ મા પ્રત્યક્ષપ્રમાણ ઉપર રહેલો છે તે ટીકા સહિત બરોબર સમજવું.

ઉપલી આકૃતિમાં ૩ અને ૬ ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા કરતાં ઓછા લાગેછે; અને તેથી **ब** અને **ड** છેડા લંબાવીશું તો બન્ને લીટીઓ મળશે; તેથી ઉલટું ૪ અને ૫ ખૂણા બે કાટખૂણા કરતાં વધારે છે, માટે **अ** અને **क** એકેકથી દૂરદૂર જતા થશે.

સિદ્ધાંત ૨૭. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓ ઉપર પડીને વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ બરોબર કરે, તો તે બે લીટીઓ સમાન્તર થશે.



સાધન.

ધારો કે इफ સીધીલીટી अब અને कड સીધીલીટીઓને ग અને ह બિંદુઓમાં એવી રીતે છેદે છે કે વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ अगह અને गहड એકેકની બરોબર છે,

તો अब અને कड સમાન્તર થશે.

સિદ્ધતા.

જો अब અને कड સમાન્તર ન હોય, તો એ લીટીઓ લંબાવતાં ब અને ड તરફ, અથવા अ અને क તરફ મળવી જોઈએ.

જો એમ બની શકે તો ધારો કે એ લીટીઓ ब અને ड તરફ લંબાવતાં च બિંદુમાં મળે છે.

ત્યારે चगह એક ત્રિકોણ થયો, જેની બે બાજુઓ चग અને चह છે, અને જેનો પાયો गह છે.

હવે चग બાજુ अ બિંદુ સુધી લંબાવી છે, માટે

બહારનો ખૂણો अगह માંહેના સામેના ખૂણા गहच કરતાં મ્હોટો છે, (૧. ૧૬)

પણ એ બે ખૂણા તો સરખા આપેલા છે, (પ્રતિ.)

એટલે, એ બે ખૂણા ન્હાના મ્હોટા પણ છે અને વળી સરખા પણ છે. એ અસંભવિત છે.

માટે अब અને कड લીટીઓ ब અને ड તરફ લંબાવતાં મળી શકશે નહિ.

એમજ એમ પણ સિદ્ધ થઈ શકે, કે अ અને क તરફ પણ લંબાવતાં મળશે નહિ.

માટે એ બે લીટીઓ સમાન્તર છે.

માટે જો એક સીધીલીટી ઈ૦. प्र. सि.

પ્રશ્ન.

(૧) अ અને क તરફથી લીટીઓ મળે એ અસંભવિત છે એવું બતાવો.

(૨) જો જુદીજુદી બાજૂ ઉપરના બહારના બે ખુણાઓ સરખા હોય તો લીટીઓ સમાન્તર થશે.

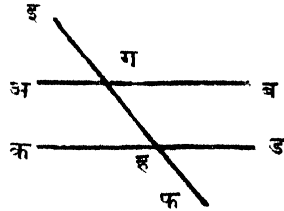
(૩) આ સિદ્ધાંતનો પુરાવો કેવી જાતનો છે? અને કયા કયા સિદ્ધાંતોમાં એવો પુરાવો આવી ગયો છે?

સિદ્ધાંત ૨૮. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો એક સીધી લીટી બીજી બે સીધી લીટીઓ ઉપર પડીને (૧) બહારનો એક ખુણો તે લીટીની તેજ દિશા તરફના માંહેના સામેના ખુણાની બરોબર કરે; અથવા (૨) તે લીટીની એકજ બાજુના બે માંહેના ખુણા મળીને બે કાટખુણા બરાબર કરે, તો તે બે લીટીઓ સમાન્તર થશે.

સાધન.

ધારો કે इफ સીધી લીટી, अब અને कड સીધી લીટીઓને ग અને ह બિંદુઓમાં છેદે છે; અને



(૧) બહારનો ખુણો इगब તેજ બાજૂ ઉપરના માંહેના સામેના ખુણા गहड ની બરોબર છે;

તો अब અને कड સમાન્તર થશે.

અથવા (૨) इफ લીટીની એકજ બાજુના બે માંહેના ખુણા बगह અને गहड મળીને બે કાટખુણા બરોબર છે તો अब અને कड સમાન્તર થશે.

સિદ્ધતા.

इगब ખુણો गहड ખુણાની બરોબર છે, (પ્રતિ.)

પણ ફગબ ખૂણો સામસામેના ખૂણા અગહ ની બરોબર છે. (૧. ૧૫)

માટે અગહ ખૂણો ગહડ ખૂણાની બરોબર છે; (પ્ર.પ્ર.૧)

પણ એતો વ્યુત્ક્રમખૂણાઓ છે:

માટે અબ અને કડ લીટીઓ સમાન્તર છે. (૧.૨૭)

(૨) બગહ અને ગહડ ખૂણાઓ મળીને બે કાટ-ખૂણા બરાબર છે;

પણ પાસપાસેના ખૂણાઓ બગહ અને અગહ મળી-ને પણ બે કાટખૂણાની બરોબર છે. (૧.૧૩)

માટે બગહ અને અગહ ખૂણા બગહ અને ગહડ ખૂ-ણાની બરોબર થયા.

તેમાંથી સાધારણ ખૂણો બગહ કહાડીલો.

તો બાકીનો ખૂણો અગહ તે બાકીના ખૂણા ગહડ ની બરોબર થયો.

પણ એતો વ્યુત્ક્રમખૂણાઓ છે.

માટે અબ અને કડ લીટીઓ સમાન્તર છે. (૧.૨૭).

માટે જો એક સીધી લીટી ઇ૦. પ્ર. સિ.

ટીકાઃ—આ સિદ્ધાંત ઉપરથી એવું દેખાયછે, કે જો બગ લીટીથી બગહ ખૂણો ગહડ ખૂણાના ન્યૂનતાપૂરક ખૂણાની બરો-બર થાય, તો બગ લીટી હડને સમાન્તર થશે. બારમા પ્રત્યક્ષ-પ્રમાણમાં એવુ ધારેલું છે, કે એક લીટીથી ગહની સાથે ગહડની ન્યૂનતાપૂરક ખૂણાના કરતાં ન્હાનો ખૂણો થાય, તો તે લીટી હડ ને સમાન્તર થશે નહિ; અને તેથી જો લંબાવી તો તેને મળશે. માટે ખરેખરૂં પ્રત્યક્ષપ્રમાણ તો એજ કે, બે સીધી લીટીઓ જેઓ અરસ્પરસને છેદેછે, તેઓ બન્ને એકજ સીધા લીટીની સાથે સમાન્તર થઈ શકતી નથી.

બારમું પ્રત્યક્ષપ્રમાણ ૨૯ મા સિદ્ધાંતને માટે અગત્યનું છે;

પણ એ પ્ર. પ્ર. બરેબઈ પ્રત્યક્ષ નથી માટે એ સિદ્ધાંત એ પ્રમાણના આધાર વગર સિદ્ધ કરવાને ઘણાં એક પ્રયત્નો થયાં છે; પણ તેમાં કોઈ પણ એવું નથી કે એ પ્ર. પ્ર. વાપરવાને જે હરકત લાગેછે તેથી ઓછી હરકત તેને લાગે.

પ્રશ્ન.

(૧) कहफ અને अगह ખૂણા બરોબર છે; તો લીટીઓ સમાન્તર થશે.

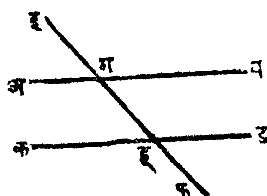
(૨) अगह અને गहक्र મળી બે કાટખૂણા બરોબર છે; તો લીટીઓ સમાન્તર થશે

(૩) જે લીટીઓ એકજ સીધીલીટીને લંબ છે તે એકેકને સમાન્તર છે.

સિદ્ધાંત ૨૯. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો એક સીધીલીટી બે સમાન્તર સીધી લીટીઓ ઉપર પડે તો તે વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ એક બીજાની બરોબર કરશે; અને બહારનો એક ખૂણો તે લીટીની તેજ દિશા તરફના માંહેના સામેના ખૂણાની બરોબર કરશે; અને તે લીટીની એકજ બાજુના બે માંહેના ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા બરોબર કરશે

સાધન.



ધારો કે इफ સીધી લીટી બે સમાન્તર સીધી લીટીઓ अब અને कड ઉપર પડેછે.

તો (૧) વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ अगह, गहड એક બીજાની બરોબર થશે

(૨) બહારનો ખૂણો इगब માંહેના એકજ તરફના સામેના ખૂણા गहड ની બરોબર થશે;

(૩) એકજ તરફના બે માંહેના ખૂણાઓ બગહ, ગહડ મળીને બે કાટખૂણા બરોબર થશે.

સિદ્ધતા.

(૧) જો અગહ ખૂણો ગહડ ખૂણાની બરોબર ન હોય, તો એ બેમાંનો એક બીજા કરતાં મ્હોટો હોવો જોઈએ.

જો એમ બની શકે તો ધારો કે અગહ ખૂણો ગહડ કરતાં મ્હોટો છે;

એ દરેકમાં બગહ ખૂણો ઉમેરો;

ત્યારે અગહ અને બગહ ખૂણા મળીને બગહ અને ગહડ ખૂણા કરતાં મ્હોટા થયા.

પણ પાસપાસેના ખૂણા અગહ અને બગહ તો બે મળીને બે કાટખૂણાની બરોબર છે; (૧.૧૩)

માટે, બગહ અને ગહડ ખૂણા તો બે મળીને બે કાટખૂણા કરતાં ન્હાના થયા;

માટે અબ અને કડ લીટીઓ બ અને ડ તરફ લંબાવતાં મળવી જોઈએ; (પ્ર. પ્ર. ૧૨)

પણ એ લીટીઓ તો મળેજ નહિ; કેમકે તેઓ સમાન્તર છે. (પ્રતિ.)

માટે, અગહ ખૂણો ગહડ કરતાં મ્હોટો નથી;

તેમજ ગહડ ખૂણો અગહ કરતાં મ્હોટો નથી એ સિદ્ધ થશે;

એટલે એ વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ બરોબર છે.

(૨) અગહ ખૂણો સામસામેના ખૂણા ઇગબ ની બરોબર છે; (૧. ૧૫)

પણ અગદ ખૂણો તો ગદઙ ખૂણાની બરોબર છે;
(સિદ્ધ કીધું.)

માટે બહારનો ખૂણો ઇગબ માંહેના સામેના ખૂણા ગદઙ ની બરોબર થયો.

(૩) ઇગબ ખૂણો ગદઙ ખૂણાની બરોબર છે;
(સિદ્ધ કીધું.)

એ દરેકમાં બગદ ખૂણો ઉમેરો;

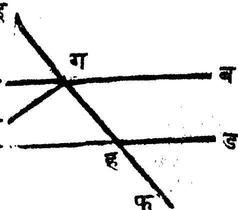
ત્યારે ઇગબ, બગદ ખૂણા બગદ, ગદઙ ખૂણાની બરોબર થયા; પણ પાસપાસેના ખૂણા ઇગબ, બગદ તો બે મળીને બે કાટખૂણાની બરોબર છે; (૧. ૧૩)

માટે, માંહેના બે ખૂણા બગદ, ગદઙ પણ બે મળીને બે કાટખૂણાની બરોબર છે.

માટે, જો એક સીધીલીટી બે સમાન્તર સીધીલીટીઓ ઉપર પડે, ઇ૦. પ્ર. સિ.

ટીપઃ—આ સિદ્ધાંતનો આધાર યુક્લિડના બારમા પ્ર. પ્ર. ઉપર રહેલો છે; માટે સમાન્તર લીટીઓના ગુણોનો આધાર તે ઉપર છે. પણ તે પ્ર. પ્ર. સમજવામાં સહેલું નથી; અને વળી ખરેખરૂં પ્રત્યક્ષ પણ નથી. માટે તે પ્ર. પ્ર. નો આધાર ન લેતાં ઉપલો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવાને ત્રિસ યત્નો થયાં છે; પણ તેમાંની કોઈપણ રીતે મુશ્કેલી બિલકુલ દૂર થતી નથી. તોપણ સૌમાં ઓછી અડચણ વાળી રીત "પ્લેફૈર" ના પ્રત્યક્ષ પ્રમાણની છે; તે નીચે આપી છેઃ—

પ્ર. પ્ર. "જો બે લીટી એકેકને છેદે તો તે બન્ને એકજ સીધીલીટીને સમાન્તર હોઈ શકે નહિ." આ પ્ર. પ્ર. મુશ્કિલ નથી; એમાં જે કહ્યું છે તે ઘણુંકરીને પ્રત્યક્ષજ છે. આ ઉપરથી ૨૯ મો સિદ્ધાંત નીચે પ્રમાણે સિદ્ધ થાયછેઃ—



(૧) **अब** અને **कड** આપેલી સમાન્તર લીટીઓ છે; તો **अगह** ખૂણો=**गहड** થશે. જો તેમ ન હોય તો ધારો કે **अगह** મ્હોટો છે; તેમાંથી **पगह** ખૂણો **गहड** બરોબર કાપો. હવે **पगह=गहड**; માટે **पग** લીટી **कड** ને સમાન્તર છે; (૧.૨૭) પણ **अग** લીટી પણ **कड** ને સમાન્તર આપેલી છે. એ ઉપલા પ્ર. પ્ર. ની વિરૂદ્ધ છે. માટે **अगह** ખૂણો **गहड** ખૂણા કરતાં મ્હોટો નથી; તેમજ ન્હાનો પણ નથી; એટલે સરખો છે.

(૨) અને (૩) ઉપરના સિદ્ધાંત પ્રમાણેજ સિદ્ધ થશે.

ઉપલા ત્રણ સિદ્ધાંતો ઉપરથી કેટલાક સહેલા ઉપસિદ્ધાંતો નિકળી શકેછે; તેઓની સિદ્ધતા પ્રત્યક્ષ છે; પણ તે ઉપસિદ્ધાંતો કાંઈ પુરાવામાં વપરાતા નથી; તેઓ નીચે પ્રમાણે છેઃ—

(૧) બે સમાન્તર લીટીઓ માંહેલી એક ઉપર જો એક સીધી લીટી લંબ હોય તો તેને લંબાવતાં તે બીજી લીટી ઉપર લંબ થશે.

(૨) બે સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે જે જૂદા જૂદા લંબોના ભાગો પડેછે તેઓ સરખાજ છે.

(૩) બે સમાન્તર સીધી લીટીઓમાંની દરેક ઉપર એકેક લંબ દોરી હોય તો તે બે લંબો એકજ લીટીમાં થશે; અથવા સમાન્તર થશે.

(૪) બે છેદનારી લીટીઓમાંની દરેક ઉપર એકેક લંબ દોરિયે તો તે લંબો સમાન્તર હોઈ શકે નહિ.

પ્રશ્ન.

(૧) **अगइ** અને **डहफ** ખુણા સરખા છે એવું સિદ્ધ કરો.

(૨) बगह અને डहफ ખૂણા સરખા છે એવું સિદ્ધ કરો.

(૩) इगब અને डहफ મળીને બે કાટખૂણા બરોબર થશે.

(૪) ૨૯ માંના ત્રણ ભાગોના વ્યત્યાસ કયા સિદ્ધાંતોમાં સિદ્ધ થઈ ગયા છે, તે બતાવો.

૨૭-૨૮-૨૯ સિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્ન.

(૧) બે લીટીઓ अब અને कड એક બીજીને इ બિંદુમાં દુભાગેછે; તો अक લીટી बड ને સમાન્તર થશે.

(૨) જે લીટીઓ એકજ લીટીને લંબ છે, તે લીટીઓ એકેકને સમાન્તર છે.

(૩) જો બે લીટીઓ અરસ્પરસ બીજી બે લીટીને સમાન્તર હોય તો પહેલી બે લીટીઓ વચ્ચેનો ખૂણો બીજી બેની વચ્ચેના ખૂણાની બરોબર છે.

(૪) જો બે સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચે બન્નેથી સરખે અન્તરે એક બિંદુ લઈને તેમાંથી બે લીટીઓ દોરિયે, તો તેથી સમાન્તર લીટીઓના જે બે ભાગ થશે તે સરખા થશે.

(૫) બે સીધી લીટીઓ એકેકને છેદેછે; તેઓ બીજી બે સીધી લીટીને અરસ્પરસ સમાન્તર છે; તો તેઓની વચ્ચેના ખૂણા બરોબર થશે.

(૬) એક ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી તે ખૂણાને દુભાગનારી એક લીટી પાયા સુધી દોરી તો જે બિંદુમાં તે પાયાને છેદેછે તેમાંથી ત્રિકોણની બાજૂઓને જે સમાન્તર લીટીઓ તેજ ત્રિકોણમાં દોરીશું, તે બરોબર થશે.

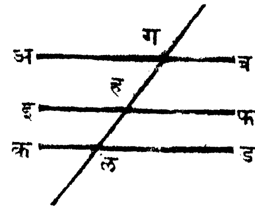
(૭) બે સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે કોઈ પણ સીધી લીટી દોરીને તેના મધ્યબિંદુમાંથી એક બીજી લીટી તે સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે દોરીશું તો તે પણ તેજ બિંદુમાં દુભાગાશે.

(૮) કોઈ ત્રિકોણના એક બહારના ખુણાને દુભાગનારી લીટી એક બાજુને સમાન્તર હોય તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજૂ થશે.

સિદ્ધાંત ૩૦. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો બે સીધી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીની સાથે સમાન્તર હોય, તો તેઓ એકેકને સમાન્તર થશે.

સાધન.



ધારો કે બે સીધી લીટીઓ अब, कड દરેક इफ ને સમાન્તર છે;

તો अब, कड ને સમાન્તર થશે.

સિદ્ધતા.

अब અને इफ સમાન્તર લીટીઓને गह કાપે છે,

માટે अगह ખુણો તેના વ્યુત્ક્રમ ખુણા गहफ ની બરોબર છે. (૧. ૨૯)

અને, इफ અને कड સમાન્તર લીટીઓને गहल છેદે છે,

માટે બહારનો ખુણો गहफ માંહેના ખુણા हलड ની બરોબર છે; (૧. ૨૯)

પણ, ઉપર બતાવ્યું કે गहफ ખુણો તો अगह ની બરોબર છે.

માટે अगह ખુણો गलड ખુણાની બરોબર છે (પ્ર. પ્ર. ૧)
અને એ ખુણાઓ વ્યુત્ક્રમ છે;
માટે अब લીટી कड ને સમાન્તર છે. (૧. ૨૭)
માટે જો બે સીધી લીટી ઇ. प्र. सि.

ટીપઃ—૨૯ મા સિદ્ધાંતની ટીપમાં આપેલા "પ્લેફેર"ના પ્ર. પ્ર. થી આ સિદ્ધાંત તુરત થઈ શકેછે; કેમકે જો એ બે લીટીઓ સમાન્તર ન હોય તો મળવી જોઈએ; પણ જો મળે તો દરેક इफ લીટીને સમાન્તર હોય નહિ; (પ્ર. પ્ર.) જે પ્રતિજ્ઞાથી વિરૂદ્ધ છે.

વળી એ પણ જોવાનું છે કે આ સિદ્ધાંત એક રીતે બિલકુલ પ્રત્યક્ષ છે, કારણ કે જો अब અને कड લીટીઓ इफ લીટી જે તેઓની વચ્ચે આવેલી છે તેને મળી શકતીજ નથી (પ્રતિ.) તો તેઓ એકેકને પણ મળી શકેજ નહિ; એટલે સમાન્તરજ હોવી જોઈએ.

આકૃતિમાં अब અને कड લીટીઓને બે બાજુએ દોરીને इफ ને વચમાં દોરી છે, પણ इफ લીટી એક છેડેથી દોરીને પણ સિદ્ધાંત થઈ શકેછે.

પ્રશ્ન.

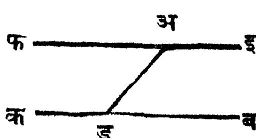
(૧) બે સમાન્તર લીટીમાંથી એકને છેદનારી લીટી બીજીને મળવીજ જોઈએ.

(૨) આકૃતિમાં આપેલી લીટીઓ જૂદી રીતે ગોઠવીને એજ સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

સિદ્ધાંત ૩૧. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક આપેલા બિંદુમાંથી એક આપેલી સીધી લીટીને સમાન્તર એક સીધી લીટી દોરવી.

સાધન.



ધારો કે अ **આપેલું બિંદુ છે; અને** बक **આપેલી સીધી લીટી છે; તો** अ **બિંદુમાંથી** बक **લીટીને સમાન્તર એક લીટી દોરવાની છે.**

રચના.

बक લીટીમાં એક બિંદુ ड લો; અને अ, ड બિંદુઓ સાંધો.

डअ લીટીમાં अ બિંદુ આગળ डअइ ખુણો अडक ખુણાની બરોબર, अडની સામી બાજૂએ બનાવો; (૧.૨૩)

અને इअ ને फ સુધી લંબાવો.

તો इफ લીટી कबને સમાન્તર થશે.

સિદ્ધતા.

अड લીટી બે સીધી લીટીઓ इफ, बक ને મળે છે, અને વ્યુત્ક્રમખુણા इअड, अडक બરોબર કરે છે.

માટે इक લીટી बक ને સમાન્તર છે. (૧. ૨૭)

અને તે अ બિંદુમાંથી દોરી છે. कृ. कृ.

પ્રશ્ન.

(૧) अ બિંદુ આગળ अडक ખૂણાની બરોબર જે ખૂણો બનાવ્યો છે તે अडक બીજી દિશા તરફ બનાવ્યો હોય તો સિદ્ધાંત સિદ્ધ થાય કે નહિ?

(૨) આપેલા બિંદુમાંથી એકજ સમાન્તર લીટી દોરાય કે વધારે?

(૩) એક આપેલા બિંદુમાંથી એક એવી લીટી દોરો કે તે એક આપેલી લીટી સાથે એક આપેલા ખૂણા બરોબર ખૂણો કરે.

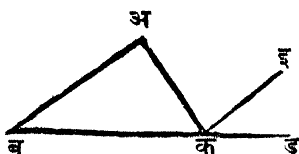
(૪) એક આપેલા બિંદુમાંથી એક એવી લીટી દોરો કે બે સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે આવેલો તેનો ભાગ એક આપેલી લીટીની બરોબર થાય; આ ક્યારે અશક્ય છે?

સિદ્ધાંત ૩૨. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો એક ત્રિકોણની એક બાજૂ લંબાવી, તો બહારનો ખૂણો માંહેના અને સામેના બે ખૂણા-

ઓની બરોબર થશે; અને હરેક ત્રિકોણના ત્રણ માંહેના ખૂણાઓ મળીને બે કાટખૂણા બરોબર થશે.

સાધન.



ધારો કે अबक આપેલો ત્રિકોણ છે; જેની એક बक બાજૂ ड બિંદુ સૂધી લબાવી છે.

તો (૧) બહારનો ખૂણો अकड માંહેના સામેના ખૂણાઓ कअब, अबक ની બરોબર થશે:

અને (૨) માંહેના ત્રણ ખૂણાઓ अबक, बकअ, कअब મળીને બે કાટખૂણા બરોબર થશે.

રચના.

क બિંદુમાંથી कइ લીટી बअ ને સમાન્તર દોરો (૧. ૩૧)

સિદ્ધતા.

बअ લીટી कइ ને સમાન્તર છે; અને તેઓને अक મળેછે;

માટે, अकइ ખૂણો તેના વ્યુત્ક્રમખૂણા कअब ની બરોબર છે. (૧. ૨૯)

વળી बअ લીટી कइ ને સમાન્તર છે, અને बड તેઓને મળેછે,

માટે બહારનો ખૂણો इकड માંહેના સામેના ખૂણા अबक ની બરોબર છે; (૧.૨૯)

માટે બહારનો આખો ખૂણો अकड બે માંહેના સામેના ખૂણા कअब, अबक ની બરોબર છે.

(૨) વળી, अकड ખૂણો कअब, अबक ખૂણાની બરોબર છે, (સિદ્ધ કીધું)

તે દરેકમાં बकअ ખૂણો ઉમેરો;

તો बकअ, अकड ખૂણા મળીને ત્રણ ખૂણા बकअ, कअब, अबकની બરોબર થયા. (પ્ર. પ્ર. ૨)

પણ પાસપાસેના ખૂણા बकअ, अकड તો બે કાટખૂણા બરોબર છે, (૧. ૧૩)

માટે ત્રણ ખૂણા बकअ, कअब, अबक મળીને પણ બે કાટખૂણાની બરોબર થયા.

માટે એક ત્રિકોણની ઇ. प्र. सि

સહેલા ઉપસિદ્ધાંતો—(૧) જો બે ત્રિકોણોમાં એકના બે ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજાના બે ખૂણાઓની બરોબર હોય તો એકનો બાકી રહેલો ત્રિજો ખૂણો બીજાના ત્રિજા ખૂણાની બરોબર થશે.

(૨) એક કાટખૂણ ત્રિકોણના બે સાંકડા ખૂણા એક બીજાના કોટીખૂણા થશે.

(૩) એક કાટખૂણ સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણનો દરેક સરખો ખૂણો અર્ધ કાટખૂણ બરોબર છે.

(૪) જો એક ત્રિકોણનો એક ખૂણો બીજા બેના સર્વાળા બરોબર હોય તો તે ખૂણો કાટખૂણો હોવો જોઇએ.

(૫) એક ચતુષ્કોણાકૃતિના ચાર ખૂણાઓ મળીને ચાર કાટખૂણા બરોબર છે.

(૬) એક સમબાજુ ત્રિકોણનો દરેક ખૂણો એક કાટખૂણાનો ⅔ છે.

પ્રશ્ન.

(૧) એક સાંકડખૂણ ત્રિકોણમાં કોઇપણ બે ખૂણા મળીને ત્રિજા કરતાં મ્હોટા હોવા જોઇએ.

(૨) એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણની એક બાજૂ લંબાવતાં જે ખૂણો થાય, તેને દુભાગનારી લીટી પાયાને સમાન્તર થશે.

(૩) ઉપલા સિદ્ધાંતનો બીજો ભાગ ફક્ત ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજૂને સમાન્તર લીટી દોરીને સિદ્ધ કરો.

(૪) એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણના પાયા ઉપરના ખૂણાઓને દુભાગનારી લીટીઓ વચ્ચેનો ખૂણો તે પાયાને એક છેડેથી લંબાવતાં જે ખૂણો થાય તેની બરોબર થશે.

(૫) કોઈપણ ત્રિકોણના પાયાને બન્ને છેડેથી લંબાવ્યો તો બહારના બે ખૂણાના સર્વાળામાંથી ટોચનો ખૂણો બાદ કરતાં બે કાટખૂણા બાકી રહેશે.

(૬) એક કાટખૂણ ત્રિકોણમાં કાટખૂણાના શિરોબિંદુથી એક લીટી સામેની બાજુના મધ્યબિંદુ સુધી દોરી હોય, તો તેથી બે સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ થશે.

(૭) એક સમર્યાદ સીધી લીટીના એક છેડાથી તે લીટી લંબાવ્યા વિના તે લીટી ઉપર એક લંબ દોરો.

(૮) એક કાટખૂણાના ત્રણ સરખા ભાગ કરો.

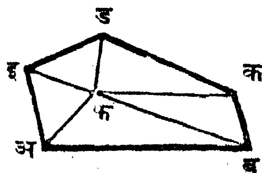
ઉપરનો સિદ્ધાંત ઘણોજ અગત્યનો છે; અને તેના ઉપરથી નિકળતા કેટલાક ઉપસિદ્ધાંતો અને તેને લગતા કેટલાક પ્રશ્નો ઉપર આપ્યા છે. પણ એ સિદ્ધાંત ઉપરથી બે ઉપસિદ્ધાંતો ઘણાજ અગત્યના નિકળે છે; અને તે ૩૨ મા સિદ્ધાંતના પહેલા અને બીજા ઉપસિદ્ધાંતને નામે પ્રખ્યાત છે. તેમનો ઉપયોગ ગણિતમાં વારવાર થાયછે. માટે તેમની આકૃતિ, રચના, સિદ્ધતા, વગેરે નીચે અનુક્રમે આપ્યાં છે.

સિદ્ધાંત ૩૨ માનો ઉપસિદ્ધાંત પહેલો.

કોઈપણ સીધીલીટીઆકૃતિના બધા માંહેના ખૂણામાં ચાર

કાટખૂણા ઉમેરિયે તો તે સર્વાળો આકૃતિની જેટલી બાજૂઓ હોય તેના બમણા કાટખૂણા બરોબર થાય.

ધારો કે अबकडइ એક સીધીલીટીઆકૃતિ છે.



તેમાં એક फ બિંદુ લીધું; અને તેને આકૃતિના દરેક બિંદુ સાથે સાંધ્યું.

તો જેટલી બાજૂ આકૃતિની છે તેટલા તે આકૃતિમાં ત્રિકોણો થયા.

અને દરેક ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણાઓ મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે;

માટે એ બધા ત્રિકોણોના બધા ખૂણાઓનો સર્વાળો તે આકૃતિની જેટલી બાજૂઓ છે તેથી બેવડા કાટખૂણા જેટલો થયો.

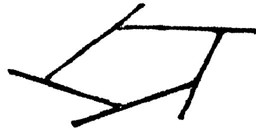
પણ એ ત્રિકોણોના બધા ખૂણાઓ લઇયે તો તો આકૃતિના બધા માંહેના ખૂણાઓ અને फ બિંદુ આગળના બધા ખૂણા થયા.

વળી फ બિંદુ આગળના બધા ખૂણા મળીને ચાર કાટખૂણા બરોબર છે. (૧.૧૫.ઉપ.)

માટે આકૃતિના બધા માંહેના ખૂણા અને ચાર કાટખૂણા મળીને આકૃતિમાં જેટલી બાજૂઓ છે તેથી બેવડા કાટખૂણાની બરોબર છે. प. सि.

સિદ્ધાંત ૩૨માનો ઉપસિદ્ધાંત બીજો.

જો કોઇપણ સીધીલીટીઆકૃતિની દરેક બાજૂ અનુક્રમે એકજ દિશા તરફ લંબાવિયે તો બહારના ખૂણાઓ સર્વ મળીને ચાર કાટખૂણા બરોબર થશે.



દરેક શિરોબિંદુ આગળ માંહેના ખૂણો અને બહારનો બન્ને મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે; (૧.૧૩) માટે બધા માંહેના અને બધા બહારના ખૂણા મળીને આકૃતિની જેટલી બાજૂ છે તેથી બમણા કાટખૂણા બરોબર છે.

પણ માંહેના ખૂણાઓ અને ચાર કાટખૂણા મળીને પણ આકૃતિની બાજુના બમણા કાટખૂણા બરોબર છે. (૧.૩૨. ઉપ.૧)

માટે માંહેના ખૂણાઓ તથા બહારના ખૂણાઓ મળીને માંહેના ખૂણાઓ તથા ચાર કાટખૂણાની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર.૧)

માટે બહારના બધા ખૂણા મળીને ચાર કાટખૂણાની બરોબર છે.(પ્ર. પ્ર. ૩) પ્ર. સિ.

ટીપઃ—આ ઉપરથી કોઈ પણ સીધીલીટીઆકૃતિમાં બધા મળીને કેટલા કાટખૂણા થાય તે તુરત જણાશે; જેમકે, તે આકૃતિને ૮ બાજૂઓ હોય તો તેના માંહેના ખૂણા બધા મળીને ૧૬-૪=૧૨ કાટખૂણા જેટલા થશે. વળી જો આપેલી આકૃતિ એવી હોય કે તેના બધા ખૂણા સરખાજ છે, તો દરેક ખૂણાના મહત્વનો નિશ્ચય થશે. જેમકે, ૮ બાજુની આકૃતિના સર્વ ખૂણા સરખા હોય તો દરેક ખૂણો $\frac{૧૨}{૮}$ એટલે $\frac{૩}{૨}$ કાટખૂણા બરોબર થવો જોઈએ.

વળી હરેક આકૃતિના ખૂણાઓનો સર્વાળો કાટખૂણાની બેકી સંખ્યાઓની બરોબર છે; કેમકે બાજૂઓની સંખ્યાની બમણાઈ આવશ્યક બેકી છે, અને તેમાંથી ચાર બેકી સંખ્યા બાદ કીધી તો બાકી બેકી રહેશે.

વળી માંહેના ખૂણા બધા મળીને કેટલા કાટખૂણા બરોબર છે તે જાણવાથી તે આકૃતિની બાજૂઓની સંખ્યા માલમ

પડી શકેછે: કેમકે કાટખુણાની સંખ્યામાં ચાર ઉમેરીને તેનું અર્ધ લઇએ તો બાજૂઓની સંખ્યા આવે.

સિદ્ધાંત ૩૨ ના ઉપસિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્ન.

(૧) એક સમકોણ અને સમબાજૂ ષટ્કોણના દરેક ખૂણાનું મહત્ત્વ કેટલું?

(૨) એવાજ એક ષટ્કોણની એક બાજૂ લંબાવી તો બહારનો ખૂણો એક સમબાજૂ ત્રિકોણના ખૂણાની બરોબર થશે.

(૩) એક બહુકોણ આકૃતિની **ન** બાજૂઓ છે; અને તે આકૃતિના બધા ખૂણા સરખા છે; તો દરેક ખૂણાનું મહત્ત્વ કેટલું?

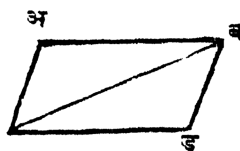
(૪) એક બહુકોણ આકૃતિની આંતરે આંતરેની બાજૂઓ લંબાવિયે તો જે બિંદુઓમાં તે બાજૂઓ છેદશે ત્યાંના બધા ખૂણાઓમાં આઠ કાટખૂણા ઉમેરિયે તો તે આકૃતિમાં જેટલી બાજૂઓ હોય તેથી બમણા કાટખૂણા બરોબર થશે.

સિદ્ધાંત ૩૩. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ— બે સરખી અને સમાન્તર સીધી લીટીઓના એકજ તરફના છેડા સાંધનારી સીધી લીટીઓ પણ જાતે સરખી અને સમાન્તર થશે.

સાધન.

ધારો કે अब અને कड બે સરખી અને સમાન્તર સીધી લીટીઓ છે; અને ધારો કે તેઓને એકજ બાજૂએથી अक અને बड લીટીઓ સાંધેછે.



તો अक અને बड જાતે સરખી અને સમાન્તર થશે.

રચના.

बक લીટી દોરો.

સિદ્ધતા.

अब અને कड લીટીઓ સમાન્તર છે, અને बक લીટી મળે છે.

માટે, વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ अबक, बकड, બરોબર છે. (૧. ૨૯)

હવે, अबक, डकब ત્રિકોણોમાં,

અब લીટી कडની બરોબર છે. (પ્રતિજ્ઞા)
અને बक લીટી બન્ને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે,
અને अबक ખૂણો बकडની બરોબર છે,

માટે એ બે ત્રિકોણ સર્વ પ્રકારે સરખા છે; (૧. ૪)

એટલે, अक પાયો डब પાયાની બરોબર છે,

અને अकब ખૂણો डबक ખૂણાની બરોબર છે;

પણ એ તો વ્યુત્ક્રમખૂણા છે;

માટે अक લીટી बड ને સમાન્તર છે. (૧. ૨૭)

અને તેઓ સરખી છે એમ પણ બતાવ્યું.

માટે, બે સરખી અને સમાન્તર ઇ० प्र. सि.

પ્રશ્ન.

(૧) આ સિદ્ધાંતના બે ભાગ છે તે જૂદા જૂદા લખો અને સિદ્ધ કરો.

(૨) એક આપેલી સીધી લીટી ઉપર તેની એકજ બાજૂએ બે બહાર આપેલાં બિંદુઓમાંથી સરખી લંબ દોરી, તો તે બિંદુઓને સાંધનારી લીટી આપેલી લીટીને સમાન્તર થશે.

(૩) એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓને દુભાગી; તો તે બે બિંદુઓ સાંધનારી લીટી પાયાને સમાન્તર થશે, અને પાયાથી અર્ધ થશે.

(૪) આ સિદ્ધાંતની પ્રતિજ્ઞામાં "એકજ તરફના બે છેડા" એવા શબ્દો લખ્યા છે તેનું કારણ શું?

સિદ્ધાંત ૩૪. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજૂઓ અરસપરસ બરોબર છે, તેમજ સામસામેના ખૂણાઓ પણ બરોબર છે; અને એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણને તેની કર્ણલીટી દુભાગેછે.

સાધન.

ધારો કે अकडब એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ છે, અને बक તેની કર્ણલીટી છે, તો એ આકૃતિની સામસામેની લીટીઓ તથા સામસામેના ખૂણા બરોબર થશે; અને बक કર્ણલીટી તેને દુભાગશે.

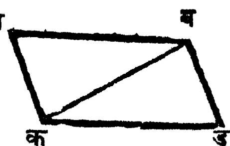
अब લીટી कड ને સમાન્તર છે, અને તેઓને बक મળે છે.

માટે વ્યુત્ક્રમ ખૂણા अबक, डकब બરોબર છે; (૧. ૨૯)

વળી, अक અને बड સમાન્તર છે, અને તેઓને बक મળે છે,

માટે વ્યુત્ક્રમ ખૂણા अकब, डबक બરોબર છે. (૧. ૨૯)

માટે, अबक, डकब ત્રિકોણોમાં,



अकब ખૂણો डबक ખૂણાની બરોબર છે.

અને अकब ખૂણો डबक ખૂણાની બરોબર છે;

અને સરખા ખૂણાઓની પાસેની બાજૂ बक સાધારણ છે;

માટે, अबक, डकब ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર છે; (૧. ૨૬)

માટે अब લીટી डक ની બરોબર છે; અને अक, डब ની બરોબર છે;

અને बअक ખુણો कडब ખુણાની બરોબર છે.

વળી, अबक ખુણો डकब ખુણાની બરોબર છે,

અને कबड ખુણો बकअ ખુણાની બરોબર છે,

માટે આખો ખુણો अबड આખા ખુણા डकअ ની બરોબર છે.

અને એવું સિદ્ધ કીધું કે अबक, डकब ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર છે,

માટે કર્ણલીટી बक, अकडब સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણને દ્વિભાગે છે.

માટે એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજૂઓ ૯૦ प्र. सि.

પ્રશ્ન.

(૧) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણનો એક ખુણો કાટખુણો હોય તો તેના બધા ખુણા કાટખુણા થશે.

(૨) જો એક ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજૂઓ સરખી હોય તો તે સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ થશે.

(૩) જો એક ચતુષ્કોણના સામસામેના ખુણા બરોબર હોય તો તે સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ થશે.

(૪) જો એક ચતુષ્કોણની બધી બાજૂઓ સરખી હોય ને એક ખુણો કાટખુણો હોય તો બધા ખુણા કાટખુણા થશે.

(૫) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની કર્ણો એકેકને દુભાગે છે.

(૬) જો એક ચતુષ્કોણની કર્ણો એકેકને દુભાગે તો તે ચતુષ્કોણ સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ હોવો જોઈએ.

(૭) જો એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની કર્ણો ખુણાને દુભાગે તો તે સમબાજૂ ચતુષ્કોણ હોવો જોઈએ.

(૮) જો એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની કર્ણો સરખી હોય તો તેના બધા ખૂણા કાટખૂણા થશે.

(૯) જો એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ કાટખૂણ ન હોય તો તેની કર્ણો સરખી થાય નહિ.

(૧૦) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની એક કર્ણના મધ્યબિંદુમાંથી બે સામસામેની બાજૂઓ સૂધી એક લીટી દોરી તો તે લીટી તે બિંદુમાં દુભાગશે.

(૧૧) જો બે સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણમાં એકની બે બાજૂઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજૂઓની બરોબર હોય, અને એકનો માંહેનો ખૂણો બીજાના માંહેના ખૂણાની બરોબર હોય, તો તે સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર થશે.

(૧૨) બે કાટખૂણ ચતુષ્કોણોમાં જો એકની બે પાસપાસેની બાજૂઓ બીજાની બે બાજૂઓની અનુક્રમે બરોબર હોય તો તે કાટખૂણ ચતુષ્કોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર થશે.

(૧૩) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણમાં એક કર્ણ ઉપર સામેના બન્ને ખૂણાઓમાંથી લંબ દોરી, તો તે લંબો બરોબર થશે.

પહેલા ૩૪ સિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્નો.

(૧) એક ત્રિકોણનો પાયો બન્ને તરફ લંબાવિયે તો બહારના ખુણાઓને દુભાગનારી લીટીઓથી થયેલો ખુણો પાયા ઉપરના માંહેના બે ખુણાના સર્વાળાનો અર્ધ થશે.

(૨) એક ત્રિકોણના પાયાના ખુણા દુભાગનારી લીટીઓ વચ્ચેનો ખુણો શિરોબિંદુના ખુણામાં પાયાના ખુણાઓના અર્ધનો સર્વાળો ઉમેરિયે તેટલો થશે.

(૩) બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજુઓ બીજાની બે બાજુઓને અનુક્રમે સરખી છે અને સમાન્તર પણ છે, તો ત્રીજી બાજુઓ પણ સરખી અને સમાન્તર થશે.

(૪) જો એક ચતુષ્કોણની સામસામેની બે બાજુઓ સમાન્તર હોય, અને બીજી બે ફક્ત સરખી હોય તો સામસામેના ખુણા ન્યૂનતાપૂરક થશે, અને કર્ણો સરખી થશે.

(૫) ચોરસ, કાટખુણ ચતુષ્કોણ, અને સમબાજૂ ચતુષ્કોણ એ સર્વ સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ થવા જોઈએ.

(૬) જો એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની એક કર્ણ તેની એક બાજૂની બરોબર હોય તો તે ચતુષ્કોણના દરેક ખુણાનું મહત્વ કહાડો.

(૭) બે સરખી અને સમાન્તર લીટીઓના સામસામેના (વ્યુત્ક્રમ) છેડાઓ સાંધ્યા, તો સાંધનારી લીટીઓ સમાન ક્યારે થશે, અને અસમાન ક્યારે?

(૮) એક ત્રિકોણના બે ખુણાઓમાંથી સામી બાજુઓ સુધી કોઈ પણ લીટીઓ એવી દોરી ન શકાય કે તે અરસ્પરસ એકએકને દુભાગે.

(૯) કોઈ અન્તવાન સીધી લીટીના ગમે તેટલા સરખા ભાગ કરો.

(૧૦) એક કાટખૂણ ત્રિકોણનો એક સાંકડો ખૂણો બીજા કરતાં ત્રણગણો છે; તો ન્હાના ખૂણાને ત્રિભાગો.

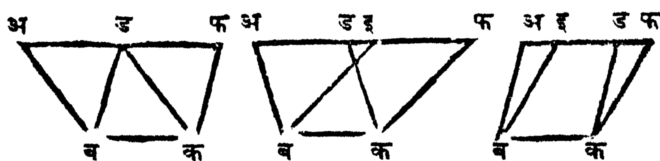
(૧૧) એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણના પાયાના એક છેડામાંથી એક લીટી સામી બાજૂ સૂધી, તથા બીજી બે લીટી પાયાના કોઇ પણ બિંદુમાંથી સામી બાજૂઓ સૂધી, એવી દોરી છે કે તેઓ પાયા સાથે સરખા ખૂણા કરે, તો પાછલી બે લીટી મળીને પહેલીના બરોબર થશે.

(૧૨) બે આપેલી લીટીઓની વચ્ચે એક એવી લીટી દોરો કે તે એક આપેલી લીટીની બરોબર હોય અને બીજી બે આપેલી લીટીને સમાન્તર હોય.

(૧૩) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની એક બાજુમાં આપેલા બિંદુમાંથી એક એવી લીટી દોરો કે તે તે સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણને દુભાગે.

સિદ્ધાંત ૩૫. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એકજ પાયા ઉપરના તથા એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચેના સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણો બરાબર છે.



ધારો કે अबकड અને इबकफ સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણો એકજ પાયા बक ઉપર અને એકજ સમાન્તરલીટીઓ बक, अफ ની વચ્ચે છે;

તો એક સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ બીજાના ક્ષેત્રફળની બરોબર છે.

સિદ્ધતા.

(૧) જો આપેલા સ૦બા૦ ચતુષ્કોણોની પાયાની સામેની બે બાજુઓ એકજ બિંદુ ક માં આવી મળતી હોય,

તો દરેક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ, बङक ત્રિકોણનો બમણો છે; (૧. ૩૪)

માટે તેઓ એકેકની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૬).

(૨) પણ જો बक પાયાની સામેની अड અને इफ બાજુઓ એકજ બિંદુમાં મળી જતી ન હોય,

તો अबकड સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ છે.

માટે अड બાજૂ बकની બરોબર છે; (૧. ૩૪)

અને તેજ કારણથી इफ લીટી बकની બરોબર છે;

માટે अड લીટી इफની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧)

માટે (બીજી આકૃતિ પ્રમાણે) આખી લીટી इअ,

અથવા (ત્રીજી આકૃતિ પ્રમાણે) બાકી રહેલી इअ

આખી અથવા બાકી રહેલી फडની બરોબર છે,

માટે फडक, इअब ત્રિકોણોમાં,

फड લીટી इअની બરોબર છે, (સિદ્ધ કીધું)

અને डक બાજૂ સામેની બાજૂ अबની બરોબર છે; (૧. ૩૪)

અને બહારનો ખૂણો फडक માંહેના ખૂણા इअबની બરોબર છે; (૧. ૨૯)

માટે फडक ત્રિકોણ इअब ત્રિકોણની બરોબર છે. (૧-૪)

હવે આખી આકૃતિ अबकफ માંથી फडक ત્રિકોણ બાદ કરીશું તો બાકી જે ભાગ રહેશે તે તેજ આકૃતિમાંથી इअब ત્રિકોણ બાદ કરતાં જે ભાગ રહેશે તેની બરોબર થવો જોઈએ. (પ્ર. પ્ર. ૩)

પણ એક ત્રિકોણ બાદ કરતાં તો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ अबकड બાકી રહેશે, અને બીજો ત્રિકોણ બાદ કરતાં સ૦ બ૦ ચતુષ્કોણ इबकफ રહેશે;

માટે સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ अबकड સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ इबकफ ની બરોબર છે.

માટે એકજ પાયા ઉપર ઇ૦ प्र. सि.

ટીપઃ—આ સિદ્ધાંતની પહેલાં જ્યાં જ્યાં બે આકૃતિ એકેકની બરોબર બતાવવામાં આવીછે, ત્યાં ત્યાં "બરોબર" શબ્દનો અર્થ સર્વે પ્રકારે બરોબર એવો કીધો છે; જેમકે ૪થા વગેરે સિદ્ધાંતોમાં બે ત્રિકોણો બરોબર કીધા છે, એટલે એવી રીતે કે દરેકની એકેક બાજૂ તથા એકેક ખૂણો અનુક્રમે બીજાની એકેક બાજૂ તથા એકેક ખુણાની બરોબર; અને વળી તે આકૃતિઓ સ્થાનાપન્ની પણ થઈ શકે. પણ આ અને હવે-પછીના કેટલાક સિદ્ધાંતોમાં આકૃતિ બરોબર કીધી છે ત્યાં "બરોબર" શબ્દનો અર્થ ફક્ત "ક્ષેત્રફળમાં બરોબર" એમ સમજવો. એક આકૃતિ બીજીના ઉપર સ્થાનાપન્ની થઈ શકે અથવા ન થાય તોપણ તેમનું ક્ષેત્રફળ એ સિદ્ધાંતોમાં સરખું બતાવ્યું છે. જેમકે, બે કાગળ અથવા લાકડાના ત્રિકોણાકાર અથવા ચતુષ્કોણ કકડા એવા થઈ શકે કે સ્થાનાપન્ની ન થાય, તે છતાં તેઓનું ક્ષેત્રફળ (તેમની સપાટીમાં આવેલી જગ્યા) સરખું હોય.

ટીપઃ—ઉપલી સિદ્ધતાના છેલ્લા ભાગમાં જરા ગુંચવણ જેવું છે. બીજી રીત એ ભાગ સિદ્ધ કરવાની એમ છે;-(આકૃતિ ૨.)

ધારો કે बइ એને कड લીટીઓ ग બિંદુમાં છેદેછે; તો अबइ અને डकफ ત્રિકોણો સરખા છે, તેમાંથી डगइ ત્રિકોણ બાદ કરો, એને बगक ઉમેરો; તો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણો સરખા થશે.

આકૃતિ ૩ માં સરખા ત્રિકેાણેામાં इबकड આકૃતિ ઉમેરેા, તેા સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણેા સરખા થયા.

પ્રશ્ન.

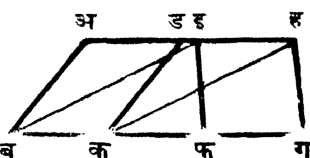
(૧) ઉપલેા સિદ્ધાંત સાધારણ પાયા ઉપર લઇને સિદ્ધ કરેા.

(૨) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજૂએ બે સરખા સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણેા હેાય તેા તેઓ એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે થશે.

સિદ્ધાંત ૩૬. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—બરેાબર પાયા ઉપરના અને એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચેના સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણેા બરેાબર છે.

સાધન.



ધારેા કે अबकड અને इफगह સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણેા બરેાબર પાયા बक અને फग ઉપર છે, અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ अह, बग વચ્ચે છે.

તેા સ૦ બા૦ अबकड સ૦ બા૦ इफगह ની બરેાબર થશે.

રચના.

बइ, कह સાંધેા.

સિદ્ધતા.

बक લીટી फग ની બરેાબર છે, (પ્રતિ.)

અને फग લીટી સામેની બાજૂ इह ની બરેાબર છે, (૧. ૩૪)

માટે, बक લીટી इहની બરેાબર છે, (પ્ર. પ્ર.૧)

અને તેઓ સમાન્તર પણ છે; (પ્રતિ.)

માટે बइ અને कह જે તેઓના એકજ તરફના છેડાઓ સાંધેછે તે લીટીઓ પણ સરખી અને સમાન્તર છે. (૧. ૩૩)

માટે इबकह સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ થયો.

હવે अबकड સ० બા० ચતુષ્કોણ इबकहની બરોબર છે, કારણ કે એ બે એકજ પાયા बक અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ बक, अह ની વચ્ચે છે. (૧. ૩૫)

વળી, इफगह સ० બા० ચતુષ્કોણ इबकह ની બરોબર છે; કારણ કે તેઓ એકજ પાયા इह અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ इह, बग ની વચ્ચે છે. (૧. ૩૫)

માટે, સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ अबकड સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ इफगह ની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧)

માટે, બરોબર પાયા ઉપર ૯૦ प्र. ०सि.

ટીપઃ—એવું ધારેલું છે કે બરોબર પાયાઓને એકજ સીધી લીટીમાં મૂકેલા છે.

ઉપસિદ્ધાંતોઃ—

(૧) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ તેના પાયાના સરખા જ પાયા ઉપર તેટલીજ ઉંચાઈના કાટખૂણ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફળની બરોબર છે.

(૨) બરોબર પાયા ઉપરના અને બરોબર ઉંચાઈના સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણો ક્ષેત્રફળમાં બરોબર છે.

(૩) સરખી ઉંચાઈના સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણોમાં જેનો પાયો મ્હોટો તેનું ક્ષેત્રફળ પણ મ્હોટું; અને પાયા સરખા હોય તો જેની ઉંચાઈ વધારે તેનું ક્ષેત્રફળ પણ વધારે.

પ્રશ્ન.

(૧) ૩૫ અને ૩૬મા સિદ્ધાંતોમાં શો ફેર છે?

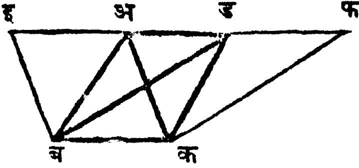
(૨) ઉપલા સિદ્ધાંત अफने डग લીટીઓ સાંધીને સિદ્ધ કરો.

સિદ્ધાંત ૩૭. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એકજ પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચેના ત્રિકોણો બરોબર છે.

સાધન.

એકજ પાયા बक ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ बक અને अड વચ્ચે બે ત્રિકોણો अबक, डबक છે.



તો अबक ત્રિકોણ डबक ત્રિકોણની બરોબર થશે.

રચના.

ब બિંદુમાંથી बइ લીટી कअ ને સમાન્તર દોરો;(૧. ૩૧) ધારો કે તે डअ ને લંબાવતાં इ બિંદુમાં છેદે છે; તેમજ क બિંદુમાંથી बड ને એક સમાન્તર લીટી कफ દોરો જે अडને લંબાવતાં फ બિંદુમાં છેદે છે.

સિદ્ધતા.

રચના પ્રમાણે इबकअ અને डबकफ દરેક આકૃતિ એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

અને વળી તેઓ એકજ પાયા बक ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ बक, इफની વચ્ચે છે,

માટે, इबकअ સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ डबकफની બરોબર છે. (૧.૩૫)

અને अबक ત્રિકોણ इबकअ સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણનો અર્ધ છે.

કારણ કે अब કર્ણ તેને દુભાગે છે; (૧. ૩૪)

વળી डबक ત્રિકોણ डबकफ स० બા૦ ચતુષ્કોણનો અર્ધ છે,

કારણ કે डक તેને દુભાગેછે. (૧. ૩૪)

પણ સરખી ચીજોના અર્ધ સરખાજ છે. (પ્ર. પ્ર. ૭)

માટે अबक ત્રિકોણ डबक ત્રિકોણની બરોબર છે;

માટે, એકજ પાયા ઉપર ઇ૦ प. सि.

પ્રશ્ન.

(૧) ઉપલી આકૃતિમાં બીજા કયા ત્રિકોણો બરોબર છે?

(૨) જો अक, बड લીટીઓ न બિંદુમાં છેદે તો બતાવો કે अनब, અને कनड ત્રિકોણો સરખા છે.

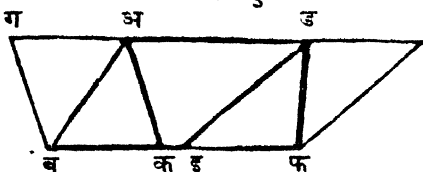
(૩) જો એક સમબાજૂ ચતુષ્કોણ अबकड ની अब બાજૂમાં એક બિંદુ प લઇને पक, पड દોરી હોય તો, पअड, पबक ત્રિકોણ મળીને पडक ત્રિકોણની બરોબર થશે.

સિદ્ધાંત ૩૮. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—બરોબર પાયાઓ ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચેના ત્રિકોણો બરોબર છે.

સાધન.

ધારો કે अबक, डइफ ત્રિકોણો बक, અને इफ બે બરો-



બર પાયાઓ ઉપર, અને बफ, अड સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે છે.

તો अबक ત્રિકોણ डइफ ત્રિકોણની બરોબર થશે.

રચના.

ब બિંદુમાંથી बग લીટી कअ ને સમાન્તર દોરો; ધારો કે તે डअ લીટીને લંબાવતાં ग બિંદુમાં છેદે છે; (૧. ૩૧)

फ બિંદુમાંથી फह લીટી इड ને સમાન્તર દોરો; અને ધારો કે તે अड ને લંબાવતાં ह બિંદુમાં છેદે છે.

સિદ્ધતા.

રચના પ્રમાણે गबकअ અને डइफह દરેક સ૦બા૦ ચતુષ્કોણ છે,

અને તેઓ બરોબર પાયા बक, इफ ઉપર છે, અને એકજ સીધી લીટીઓ बफ, गह વચ્ચે છે,

માટે गबकअ, સ૦બા૦ ચતુષ્કોણ डइफह ની બરોબર છે; (૧. ૩૬)

અને अबक ત્રિકોણ गबकअ સ૦બા૦ ચતુષ્કોણનો અર્ધ છે,

કારણ કે अब કર્ણલીટી તેને દુભાગે છે; (૧. ૩૪)

અને डइफ ત્રિકોણ डइफह સ૦બા૦ ચતુષ્કોણનો અર્ધ છે,

કારણ કે डफ તેને દુભાગે છે;

પણ સરખી ચીજોના અર્ધ સરખા છે; (પ્ર. પ્ર. ૭)

માટે अबक ત્રિકોણ डइफ ત્રિકોણની બરોબર છે.

માટે, બરોબર પાયાઓ ઉપર ઇ૦ प्र. सि.

ટીપઃ—આ સિદ્ધાંત ઉપરથી એવાં અનુમાન થઈ શકે છે કેઃ—

(૧) બરોબર પાયાઓ ઉપરના અને બરોબર ઉંચાઈના ત્રિકોણો ક્ષેત્રફળમાં બરોબર છે.

(૨) બે ત્રિકોણો સરખી ઉંચાઈના હોય, તો જેના પાયો વધારે

12

તેનું ક્ષેત્રફળ પણ વધારે; અને બે સરખા પાયા ઉપરના ત્રિકોણોમાં જેના ઉંચાઈ વધારે તેનું ક્ષેત્રફળ વધારે.

પ્રશ્ન.

(૧) ઉપલા બે સિદ્ધાંતોમાં ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે કે કેમ?

(૨) બન્ને પાયાઓ એકજ લીટીમાં છે તેમ ન લેતાં એક પાયો એકમાં અને બીજો બીજી સમાન્તર લીટીમાં લઈને સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૩) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજૂએ બે ન્હાના મ્હોટા ત્રિકોણો હોય તો તેઓ એકજ સમાન્તરલીટીઓ વચ્ચે નથી.

(૪) એક ત્રિકોણના પાયાનું મધ્યબિંદુ શિરોબિંદુ સાથે જોડ્યું હોય, તો જે બે ત્રિકોણો થાય તે બરોબર.

(૫) જો એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓ અનુક્રમે બીજાની બે બાજૂઓની બરોબર હોય, અને માંહેલા ખૂણા ન્યૂનતાપૂરક હોય તો તે ત્રિકોણો બરોબર થશે.

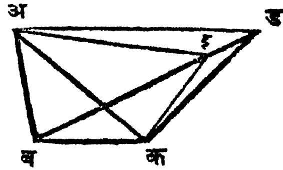
(૬) પ્રશ્ન ૪ અને ૫ નો અર્થ એકજ છે તે બતાવો.

સિદ્ધાંત ૩૯. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજૂએ બે બરોબર ત્રિકોણો હોય, તો તેઓ એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે હોવા જોઈએ.

સાધન.

ધારો કે अबक, डबक ત્રિકોણો એકજ પાયા बक ઉપર અને તેની એકજ (ઉપરની) બાજૂએ છે; અને તેઓનું ક્ષેત્રફળ બરોબર છે;



તો તેઓ એકજ સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચે થશે; એટલે, अड સાંધિયે, તો अड લીટી बक ને સમાન્તર થશે.

રચના.

જો अड લીટી बक ને સમાન્તર ન હોય, તો अ બિંદુમાંથી જો બની શકે તો બીજી લીટી अइ, बक ને સમાન્તર દોરો.

ધારો કે તે લીટી बड ને અથવા તેને લંબાવતાં इ બિંદુમાં મળે છે.

इक સાંધો.

સિદ્ધતા.

એકજ પાયા बक ઉપર, અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ बक, अइ ની વચ્ચેના ત્રિકોણો अबक, इबक બરોબર છે; (૧. ૩૭)

પણ अबक ત્રિકોણ डबकની બરોબર છે; (પ્રતિ.)

માટે डबक ત્રિકોણ इबक ત્રિકોણની પણ બરોબર છે; (પ્ર. પ્ર. ૧)

આખો ત્રિકોણ તેના ભાગની બરોબર; એ અશક્ય છે. (પ્ર. પ્ર. ૯)

માટે अइ લીટી बक લીટીને સમાન્તર નથી.

એજ પ્રમાણે, એવું સિદ્ધ થઈ શકે કે अ બિંદુમાંથી अड શિવાય કોઈ પણ લીટી बक ને સમાન્તર નથી.

માટે अड લીટી बक ને સમાન્તર છે.

માટે એકજ પાયા ઉપર ઈ૦   प्र. सि.

ટીપઃ—આ સિદ્ધાંત ઉપરથી અનુમાન થાયછે કે એકજ પાયા ઉપર બરોબર ત્રિકોણો હોય તો તેમની ઉંચાઈ બરોબર છે.

પ્રશ્ન.

(૧) આકૃતિમાં अड લીટીની નીચે अइ પડે છે; પણ अइ બહાર પડે તો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

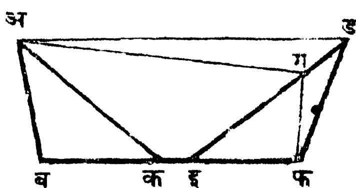
(૨) એક ત્રિકોણની બે બાજૂઓના મધ્યબિંદુને સાંધનારી લીટી પાયાને સમાન્તર છે.

(૩) એજ લીટી પાયાની અર્ધ છે.

સિદ્ધાંત ૪૦. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એકજ સીધી લીટીમાં આવેલા બરોબર પાયાઓ ઉપર તેની એકજ બાજૂએ આવેલા બરોબર ત્રિકોણો એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે છે.

સાધન.



એકજ સીધી લીટી बफ માં આવેલા સરખા પાયા बक અને इफ ઉપર અને તેઓની એકજ (ઉપલી) બાજૂએ બે ત્રિકોણો अबक, डइफ છે;

તો તે ત્રિકોણો એકજ સમાન્તરલીટીઓ વચ્ચે થશે. એટલે अ ड બિંદુઓ સાંધિયે તો अड લીટી बफ ને સમાન્તર થશે.

રચના.

જો अड લીટી बफ ને સમાન્તર ન હોય તો अ બિંદુમાંથી બની શકે તો, अग લીટી बफ ને સમાન્તર દોરો. (૧. ૩૧)

ધારો કે તે इड ને (અથવા તેને લંબાવતાં) ग બિંદુમાં મળે છે,

ग फ બિંદુઓ સાંધો.

સિદ્ધતા.

હવે अबक ત્રિકોણ गइफ ત્રિકોણની બરાબર છે;

કારણ કે તેઓ બરાબર પાયા बक, इफ ઉપર, અને એકજ સમાન્તરલીટીઓ बफ, अग ની વચ્ચે છે. (૧. ૩૮)

પણ अबक ત્રિકોણ તેા डइफ ત્રિકોણની બરાબર છે;
(પ્રતિ.)

માટે डइफ ત્રિકોણ પણ गइफ ત્રિકોણની બરાબર છે.

આખો પોતાના ભાગની બરાબર; એ અશકય છે.
(પ્ર. પ્ર. ૯)

માટે अग લીટી बफ ને સમાન્તર નથી.

એજ પ્રમાણે, આપણે બતાવીશું કે अड શિવાય કોઈ પણ લીટી अ બિંદુમાંથી बफ ને સમાન્તર દોરાય નહિ.

માટે अड લીટી बफ ને સમાન્તર છે.

માટે એકજ સીધી લીટીમાં ૯૦ प्र. सि.

ટીપઃ—આ સિદ્ધાંત ઉપરથી અનુમાન થાયછે કેઃ—

(૧) સરખા પાયા ઉપર સરખા ત્રિકોણો હોય તો તેમની ઉંચાઈ પણ બરાબર છે.

(૨) સરખા ત્રિકોણો બરાબર ઉંચાઈના હોય તો તેમના પાયા બરાબર છે.

પ્રશ્ન.

(૧) આકૃતિમાં દોરેલી अग લીટી अड ની નીચે પડેછે, તે ઉપરથી જાય તો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૨) ड બિંદુમાંથી સમાન્તર લીટી દોરીને સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

પહેલા ૪૦ સિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્નો.

(૧) "કોઇ બે ત્રિકોણો અથવા સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણોમાં (૧) પાયાની સમાનતા (૨) ઉંચાઈની સમાનતા (૩) ક્ષેત્રફળની સમાનતા, એ ત્રણમાંથી બે આપી હોય તો ત્રિજી નિકળશે" આ વાક્યમાંથી છ સિદ્ધાંતો ઉપજી શકેછે, તેઓની પ્રતિજ્ઞા લખો અને સિદ્ધ કરો.

(૨) જે ચતુષ્કોણના બન્ને કર્ણો તેને દુભાગેછે તે ચતુષ્કોણ સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ છે.

(૩) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણના બે કર્ણોથી ચાર ત્રિકોણો થાયછે તે બરોબર છે.

(૪) કોઈપણ ચતુષ્કોણના બે કર્ણોથી થયલા બે સામસામેના ત્રિકોણો બરોબર હોય તો બાકી રહેલી બે બાજૂઓ સમાન્તર થશે.

(૫) એક ત્રિકોણની બધી બાજૂઓનાં મધ્યબિંદુ સાંધવાથી જે ચાર ત્રિકાણો થાય તે બરોબર છે.

(૬) એક કાટખૂણ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજૂના મધ્યબિંદુઓ સાંધતાં એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ થશે.

(૭) એક ચોરસની પાસપાસેની બાજૂનાં મધ્યબિંદુઓ સાંધતાં એક ચોરસ થશે.

(૮) એક ત્રિકોણની એક બાજૂનાં કોઈપણ બિંદુમાથી બીજી બે બાજૂઓનાં મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ દોરતાં જે ચતુષ્કોણ થશે તે ત્રિકોણનો અર્ધ થશે.

(૯) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની એક બાજૂના બન્ને છેડાનાંથી સામેની બાજૂનાં કોઈપણ બિંદુસુધી લીટાઓ દોરી તો જે ત્રણ ત્રિકોણો થશે તેમાં એક બીજા બેના સર્વાળા બરોબર થશે.

(૧૦) એક ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ સામેના ખૂણા સાથે સાંધવાથી જે ત્રણ ત્રિકોણ અને એક ચતુષ્કોણ થશે, તેમાં સામસામેના ત્રિકોણો બરોબર થશે, અને બાકી રહેલા ત્રિકોણ ચતુષ્કોણની બરોબર થશે.

(૧૧) સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની એક બાજૂના મધ્યબિંદુમાંથી સામેના બાજૂના એક છેડા સુધી લીટી દોરવાથી જે ત્રિકોણ થશે તે સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણોનો એક ચતુર્થાંશ થશે.

(૧૨) ૧. ૧૬ ની આકૃતિમાં अबक, फबक ત્રિકોણો ક્ષેત્રફળમાં બરોબર છે.

(૧૩) એક એવી લીટી દોરો કે તેમાંનું કોઈ પણ બિંદુ એક આપેલા ત્રિકોણના પાયાના બે છેડા સાથે સાંધિયે તો જે નવા ત્રિકોણો થાય તે આપેલા ત્રિકોણના બરોબર થાય.

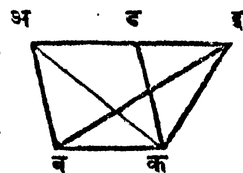
(૧૪) એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ એવો દોરો કે એક આપેલા ત્રિકોણની બરોબર હોય અને તેજ પાયા ઉપર હોય.

(૧૫) કોઈ પણ સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ, તેની બરોબર પાયા તથા ઉંચાઈના એક કાટખૂણ ચતુષ્કોણના ક્ષેત્રફલની બરાબર છે; અને એક એવાજ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ એ ક્ષેત્રફળના અર્ધની બરોબર છે.

સિદ્ધાંત ૪૧. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ અને એક ત્રિકોણ એકજ પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તરબાજૂઓની વચ્ચે હોય, તો સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ ત્રિકોણનો બમણો થશે.

સાધન.



ધારો કે अबकड સ૦બા૦ ચતુષ્કોણ તથા इबक ત્રિકોણ એકજ बक પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તરલીટીઓ बक, अइ ની વચ્ચે છે.

તો अबकड સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ इबक ત્રિકોણનો બમણો થશે.

રચના:—अक સાંધો.

સિદ્ધતા.

अबक ત્રિકોણ इबक ત્રિકોણની બરોબર છે,

કારણ કે તેઓ એકજ बक પાયા ઉપર, અને એકજ સમાન્તરલીટીઓ बक, अइ ની વચ્ચે છે, (૧. ૩૭)

પણ अबकड સ૦બા૦ ચતુષ્કોણ अबक ત્રિકોણનો બમણો છે,

કારણ કે अक કર્ણ તેને દુભાગે છે. (૧. ૩૪)

માટે, अबकड સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ इबक ત્રિકોણનો પણ બમણો છે.

માટે, એક સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ ૯૦ प्र. सि.

ટીપ:—આ સિદ્ધાંત બીજી રીતે આ પ્રમાણે લખાય:—

જો એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ તથા ત્રિકોણના પાયા તથા ઉંચાઈ બરોબર હોય, તો સ૦બા૦ ચતુષ્કોણ ત્રિકોણનો બમણો થશે.

તેમજ:—જો એક સ૦બા૦ ચતુષ્કોણ તથા ત્રિકોણની ઉંચાઈ બરોબર હોય, અને ત્રિકોણનો પાયો સ૦બા૦ ચતુષ્કોણના પાયાનો બમણો હોય તો તે ચતુષ્કોણ તથા ત્રિકોણ બરોબર થશે.

પ્રશ્ન.

(૧) એક સ૦બા૦ ચતુષ્કોણ અને એક ત્રિકોણ બરોબર પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તરલીટીઓ વચ્ચે હોય, તો સ૦બા૦ ચતુષ્કોણ ત્રિકોણના બમણા બરાબર થશે.

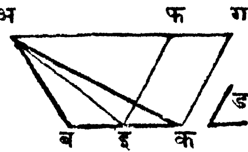
(૨) એક કાટખૂણ સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ એવો બનાવો કે તે એક આપેલા ચોરસની બરોબર હોય.

(૩) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની બહાર એક બિંદુ લઈને તેને બે સામસામેની બાજૂના છેડાઓ સાથે સાંધિયે તો જે બે ત્રિકોણો થશે તેના ક્ષેત્રફળની બાદબાકી આપેલા ચતુષ્કોણની અર્ધ થશે.

સિદ્ધાંત ૪૨. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક એવો સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ કરો કે તે એક આપેલા ત્રિકોણની બરોબર થાય, અને તેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણાની બરોબર થાય.

સાધન.



ધારો કે अबक આપેલો ત્રિકોણ છે,

અને ड આપેલો ખૂણો છે,

તો એક સ૦બા૦ ચતુષ્કોણ अबक ત્રિકોણની બરોબર, અને તેનો એક ખૂણો ड ખૂણાની બરોબર હોય, એવો કરવો છે.

રચના.

बक લીટીને इ બિંદુમાં દુભાગો; (૧. ૧૦) અને अइ સાંધો;

कइ લીટીમાં इ બિંદુ આગળ कइफ ખૂણો ड બરોબર કરો; (૧,૨૩).

અને अ બિંદુમાંથી अफग લીટી इक ને સમાન્તર દોરો. (૧. ૩૧)

અને क બિંદુમાંથી कग લીટી इफ ને સમાન્તર દોરો.

ત્યારે फइकग માગેલો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ થશે.

સિદ્ધતા.

अबइ અને अइक ત્રિકોણો બરોબર છે,

કારણ કે તેઓ બરોબર પાયા बइ, इक ઉપર છે, અને એકજ સમાન્તરલીટીઓની વચ્ચે છે. (૧. ૩૮)

માટે अबक ત્રિકોણ अइक નો બમણો છે;

પણ फइकग સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ अइक ત્રિકોણનો બમણો છે.

કારણ કે તેઓ એકજ પાયા इक અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ इक, अगनी વચ્ચે છે. (૧. ૪૧)

માટે फइकग સ૰બા૰ ચતુષ્કોણ अबक ત્રિકોણની બરોબર થયો.

અને વળી તેનો એક ખૂણો कइफ આપેલા ड ખૂણાની બરોબર છે.

માટે એક એવો સ૰ બા૰ ચતુષ્કોણ કીધો ૪૦ કૃ. કૃ.

પ્રશ્ન.

(૧) આ સિદ્ધાંત अब લીટીના અર્ધઉપર સ૰બા૰ ચતુષ્કોણ કહાડી બતાવો.

(૨) ड ખૂણાની બરોબરનો ખૂણો क અથવા ब આગળ બનાવીને માગ્યા પ્રમાણેનો સ૰ બા૰ ચતુષ્કોણ કરો.

(૩) આપેલો ખૂણો પહોળો ખૂણો લઈને કૃત્ય કરો.

(૪) એક આપેલા ત્રિકોણ બરોબર એક ચોરસ બનાવો.

(૫) એક સ૰બા૰ ચતુષ્કોણ એવો બનાવો કે એક આપેલા ચોરસની બરોબર થાય અને તેજ પાયા ઉપર હોય અને તેનો એક ખૂણો એક કાટખૂણ નો અર્ધ હોય.

(૬) એક ત્રિકોણ એવો બનાવો કે જે એક આપેલા સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની બરોબર થાય અને જેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણાની બરોબર થાય.

(૭) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ એવો બનાવો કે તે એક

આપેલા ત્રિકોણની બરોબર હોય, અને તેની બાજૂઓનો સર્વાળો ત્રિકોણના બાજૂઓના સર્વાળાની બરાબર હોય.

(૮) એક કાટખૂણ ચતુષ્કોણની બરોબર ક્ષેત્રફળનો એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણ બનાવ્યો હોય તો ત્રિકોણના પરિમિતિ (બાજૂઓનો સરવાળો) ચોખૂણની પરિમિતિ કરતાં વધારે થશે.

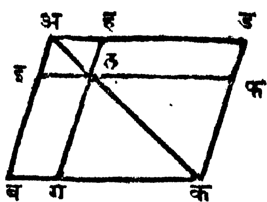
વ્યાખ્યાઃ—એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણના કર્ણમાં એક બિંદુ લઈએ, અને તેમાંથી સમબાજૂ ચતુષ્કોણની બાજૂઓને સમાન્તરલીટીઓ દોરીએ તો તે આખી આકૃતિના જે ચાર ભાગ થશે, તેમાંથી જે બેમાંથી કર્ણ પાર જાયછે, તેને "કર્ણની આસપાસના સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણો" કહેવા; અને જે બીજા બે તે આકૃતિ પૂરી કરવાને બાકી રહ્યા તેને તે "સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની પૂરવણીઓ" અથવા પૂરકસમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણો" કહેવા.

જેમકે નીચેના સિદ્ધાંતની આકૃતિમાં अइलह અને लगकफ એ કર્ણની આસપાસના તથા हलफड અને इबगल એ પૂરક-સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણો થયા.

સિદ્ધાંત ૪૩. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ— કોઈ પણ સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણમાં કર્ણની આસપાસના સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની પૂરવણીઓ બરોબર છે.

સાધન.



ધારો કે अबकड એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ છે;

અને लड, लब તેના પૂરકસમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણો છે;

એટલે. તેના કર્ણ अकनी આસપાસના સ૦બા૦ ચતુષ્કોણો इह, गफની પૂરવણીઓ છે.

ત્યારે પૂરકસ૦બા૦ ચતુષ્કોણ बल પૂરકસ૦બા૦ ચ-તુષ્કોણ लड़ની બરોબર થશે.

સિદ્ધતા.

हह સમબાજૂ ચતુષ્કોણ છે, અને अल તેનો કર્ણ છે

માટે अइल ત્રિકોણ अहल ત્રિકોણની બરોબર છે. (૧. ૩૪)

એજ પ્રમાણે, लगक ત્રિકોણ लफक ત્રિકોણની બરો-બર છે.

પણ આખો अबक ત્રિકોણ આખા अडक ત્રિકોણની બરોબર છે,

કારણ કે अक કર્ણ તેને દુભાગે છે: (૧. ૩૪)

માટે બાકી રહેલો પૂરકસ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ बल બાકી રહેલા પૂરકસ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ लड़ની બરોબર છે.

માટે કોઈપણ સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણના ઈ૦. प्र. सि.

પ્રશ્ન.

(૧) જે ચાર માંહેલા ચતુષ્કોણો છે તે સમાન્તરબાજૂ ચતુ-ષ્કોણ છે એવું બતાવો; અને તેઓ આપેલા સ૦ બા૦ ચતુષ્કો-ણને સમકોણ છે એવું બતાવો.

(૨) બીજો કર્ણ દોરીને તેમાં બિંદુ લઈને સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

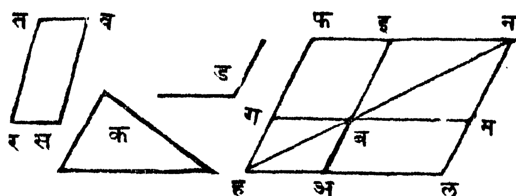
(૩) જો કર્ણમાં બે બિંદુઓ લઈને તે બન્નેમાંથી સમાન્તર લીટીઓ દોરી તો જૂદી જૂદી કેટલી આકૃતિઓ થશે?

તે બધા સ૦બા૦ ચતુષ્કોણ છે એવું બતાવો, અને તેમાંના કયા કયા બરોબર છે તે બતાવો.

સિદ્ધાંત ૪૪. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક આપેલી સીધી લીટીને એક એવો

સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ લગાડવો કે તે એક આપેલા ત્રિકોણની બરોબર થાય, અને તેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણાની બરોબર હોય.



(એક સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ એક લીટીને લગાડવો, એટલે એક એવો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ કહાડવો કે તે લીટી તેની એક બાજૂ થાય.)

સાધન.

ધારો કે अब આપેલી લીટી છે; क આપેલો ત્રિકોણ છે; અને ड આપેલો ખૂણો છે.

તો अब સીધી લીટીને એક એવો સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ લગાડવો છે કે તે क ત્રિકોણની બરોબર હોય અને તેનો એક ખૂણો ड ખૂણા બરોબર હોય.

રચના.

એક સમબાજૂ ચતુષ્કોણ रसवत એવો બનાવો કે તે क ત્રિકોણની બરોબર હોય, અને તેનો स ખૂણો ड ખૂણા બરોબર હોય. (૧. ૪૨)

अब લીટી વધારીને बइ લીટી सव બરોબર કાપો;

ब બિંદુ આગળ इव લીટીમાં इबग ખૂણો स ખૂણા બરોબર કરો; (૧. ૨૩)

बग લીટી रस બરોબર કાપો;

ઇ અને ગ બિંદુઓમાંથી ઇક, ગફ લીટીઓ બગ, બઇને અરસ્પરસ સમાન્તર દોરો; (૧. ૩૧)

હવે બક એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ થયો, જે રચના પ્રમાણે સતની એટલે ક ત્રિકોણની બરોબર છે; અને તેનો બ ખૂણો ડ ખૂણા બરોબર છે.

અ બિંદુમાંથી અહ લીટી બગ અથવા ઇફને સમાન્તર દોરો; (૧. ૩૧)

અને ફગ ને લંબાવતાં ધારો કે તે હ બિંદુમાં મળેછે.

હબ સાંધો;

હવે, અહ અને ઇફ સમાન્તર છે, અને હફ લીટી તેઓને મળેછે,

માટે અહફ અને હફઇ ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે, (૧. ૨૯)

માટે, બહફ અને હફઇ મળીને બે કાટખૂણા કરતાં ઓછા છે;

માટે, હબ અને ફઇ લીટીઓને બ અને ઇ તરફ લંબાવતાં મળશે. (પ્ર. પ્ર. ૧૨)

ધારો કે તેઓ ન બિંદુમાં મળેછે.

ન બિંદુમાંથી નલ લીટી ઇઅ અથવા ફહ ને સમાન્તર દોરો. (૧. ૩૧)

અને ધારો કે હઅ, ગબ ને લંબાવતાં તેઓ નલ ને લ અને મ બિંદુઓમાં મળેછે.

ત્યારે બલ માગેલો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ થશે.

સિદ્ધતા.

ફહલન એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ છે.

માટે, લબ, બફ પૂરક સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણો થયા.

માટે, लब સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ बफनी બરોબર છે; (૧.૪૩)

પણ क ત્રિકોણ बफ ની બરોબર છે; (રચ.)

માટે, लब સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ પણ क ત્રિકોણની બરોબર છે.

વળી अबम ખૂણો સામેના ખૂણા गबहनी બરોબર છે; (૧.૧૫)

પણ गबह ખૂણો તો ड ખૂણા બરોબર છે, (રચ૦)

માટે, अबम ખૂણો પણ ड ખૂણા બરોબર છે.

અને વળી बल સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણની अब એક બાજૂ છે;

માટે अब લીટીને એક એવો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ लब લગાડ્યો કે તે क ત્રિકોણની બરોબર છે,

અને તેનો એક ખૂણો अबम આપેલા ખૂણા ड ની બરોબર છે.

માટે, એક આપેલી સીધી લીટી ૯૦ કૃ. કૃ.

પ્રશ્ન.

(૧) ૪૨ અને ૪૪ સિદ્ધાંતો વચ્ચે શો ફેર છે ?

(૨) अब લીટીને ब આગળથી નહિ, પણ अ આગળથી લંબાવીને કૃત્ય કરો.

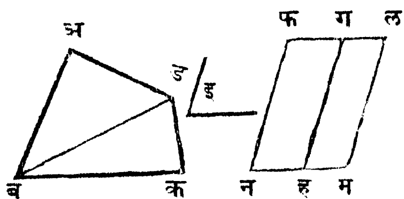
(૩) बह લીટી ન સાંધતાં, अग સાંધીને, પછી સર્વ રચના ઉપર પ્રમાણેજ કીધી, તો જેવો જોઈએ છે તેવો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ થશે કે નહિ.

(૪) એક એવો કાટખૂણ ચતુષ્કોણ કહાડો કે તે એક આપેલા ત્રિકોણ બરોબર હોય અને તેની એક બાજૂ એક આપેલી લીટી બરોબર હોય.

સિદ્ધાંત ૪૫. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક એવો સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ બનાવો કે તે એક આપેલી સીધીલીટી આકૃતિની બરોબર થાય, અને તેનો એક ખુણો એક આપેલા ખૂણાની બરોબર થાય.

સાધન.



ધારો કે अबकड એક આપેલી સીધી-લીટી આકૃતિ છે; અને इ આપેલો ખૂણો છે. તો એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ એવો બનાવવો છે કે જે अबकड ની બરોબર થાય, અને જેનો એક ખૂણો इ ખૂણા બરોબર થાય.

રચના.

बड સાંધો;

अबड ત્રિકોણની બરોબર એક फह સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ બનાવો, જેનો फनह ખૂણો इ ખૂણા બરોબર હોય. (૧. ૪૨)

અને गह લીટીને એક गम સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ લગાડો, જે डबक ત્રિકોણની બરોબર હોય, અને જેનો गहम ખૂણો इ ખૂણાની બરોબર હોય. (૧. ૪૪)

ત્યારે फनमल માગેલો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ થશે.

સિદ્ધતા.

गहम અને फनह દરેક इ ખૂણાની બરોબર છે.

માટે फनह ખૂણો गहमની બરોબર છે.

એ દરેક સરખા ખૂણામાં गहन ખૂણો ઉમેરો;

તો फनह અને गहन ખૂણા गहम અને गहन ખૂણાની બરાબર છે. (પ્ર.પ્ર.૨)

પણ ફનહ, ગહન મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે;
(૧. ૨૯)

માટે, ગહમ, ગહન ખૂણા પણ બે મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે.

માટે, નહ, હમ, એ બે લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં છે,
(૧. ૧૪)

વળી, નમ અને ફગ સમાન્તર છે, અને તેઓને હગ મળે છે,

માટે મહગ, હગફ વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ બરોબર છે;
(૧. ૨૯)

એ બન્નેમાં હગલ ખૂણો ઉમેરો;

ત્યારે મહગ, હગલ ખૂણા મળીને હગફ, હગલ ખૂણાની બરોબર છે.

પણ હમ લીટી ગલને સમાન્તર છે, અને તેઓને હગ મળે છે,

માટે, મહગ, હગલ ખૂણા બે મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે;
(૧. ૨૯)

માટે, હગફ, હગલ ખૂણા પણ બે મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે.

માટે, ફગ, ગલ લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં છે.
(૧. ૧૪)

અને વળી નફ અને મલ દરેક હગને સમાન્તર છે. (૨અ.)

માટે નફ લીટી મલને સમાન્તર છે. (૧. ૩૦)

અને નમ, ફલ સમાન્તર છે, (૨અ.)

માટે, ફનમલ સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ થયો. (વ્યા. ૩૬)

અને ફહ સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ અબડ ત્રિકોણની બરોબર છે,
(૨અ.)

અને ગમ સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ ૩બક ત્રિકોણની બરો-બર છે; (૨ચ.)

માટે આખો ફનમલ સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ અબકડ આ-કૃતિની બરોબર છે;

અને તેનો ફનત ખૂણો ૪ બરોબર છે.

એજ પ્રમાણે આપેલી આકૃતિ ચારથી વધારે બાજુ-ની હોય તેના બરોબર પણ સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ બનાવી શકાય.

માટે, એક એવો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ ઇ૦ કૃ. કૃ.

ઉપસિદ્ધાંતઃ—એક આપેલી લીટી ઉપર એક એવો સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ લગાડવો કે જે એક આપેલી સીધી-લીટી આકૃતિની બરોબર હોય, અને જેનો એક ખૂણો આપેલા ખૂણા બરોબર હોય.

ટીપઃ—જો આપેલી આકૃતિ પાંચ બાજૂની હોય તો તેનું એક શિરોબિંદુ બીજાં બિંદુઓ સાથે સાંધતાં ત્રણ ત્રિકોણો થશે, તેમાં બે ત્રિકોણોની બરોબર તો ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણે એક સ૦બા૦ ચતુષ્કોણ બનાવી શકાશે; પછી લમ લીટી ઉપર એક સ૦ બા૦ચતુષ્કોણ એવો લગાડો કે તે બાકી રહેલા ત્રિકોણની બરોબર હોય; અને તેનો મ આગળનો ખૂણો આપેલા ખૂણા બરોબર હોય; એટલે, આ નવી થયલી આકૃતિ સ૦બા૦ ચતુષ્કોણ સિદ્ધ થઈ શકશે, અને તે માગવા પ્રમાણેનો છે એ તો સ્પષ્ટજ છે.

એજ પ્રમાણે પાંચથી પણ વધારે બાજૂઓ આપેલી આકૃતિની હોય તો કર્યા જવું.

પ્રશ્ન.

(૧) આપેલી આકૃતિ પાંચ બાજૂની હોય તો ઉપલું કૃત્ય કરી આપો.

(૨) એક આપેલી સીધીલીટી આકૃતિ બરોબર એક કાટ-ખૂણ ચતુષ્કોણ કહાડવો.

પહેલા ૪૫ સિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્ન.

(૧) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણના ખૂણાબિંદુઓમાંથી તેના કર્ણોને સમાન્તર લીટીઓ દોરી હોય તો એક નવો સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ પેહેલાનો બમણો થશે.

(૨) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણના એક કર્ણની આસપાસના સ૦બા૦ ચતુષ્કોણોના કર્ણની એક જોડ સમાન્તર છે.

(૩) એક આપેલા ત્રિકોણની બરોબર એક બીજો ત્રિકોણ કહાડવો, જેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણાની બરોબર હોય.

(૪) એક સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણની બરોબર એક બીજો સ૦ બા૦ ચતુષ્કોણ કહાડવો, જેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણા બરોબર હોય.

(૫) એક આપેલા સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ બરોબર એક સમબાજૂ ચતુષ્કોણ કહાડો.

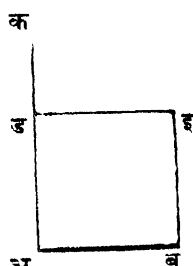
(૬) એક એવો ત્રિકોણ બનાવો કે તે આપેલા ત્રિકોણ બરોબર હોય, અને તેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણા બરોબર હોય, અને તે ખૂણાની જોડની એક બાજૂ એક આપેલી લીટી બરોબર હોય.

(૭) એક ત્રિકોણની એક બાજૂમાં આપેલા એક બિંદુમાંથી એવી લીટી દોરો કે તે તે ત્રિકોણના બે સરખા ભાગ કરે.

સિદ્ધાંત ૪૬. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક આપેલી સીધી લીટી ઉપર એક ચોરસ કરવો.

સાધન.



अब આપેલી સીધી લીટી છે; તેના ઉપર એક ચોરસ કરવાનો છે.

રચના.

अ બિંદુમાંથી अक લીટી अब ને લંબ દોરો; (૧. ૧૧)

अड લીટી अब જેટલી કરો; (૧. ૩)

ड બિંદુમાંથી डइ લીટી अब ને સમાન્તર દોરો; (૧. ૩૧)

અને ब બિંદુમાંથી बइ લીટી अड ને સમાન્તર દોરો; ધારો કે તે डइ લીટીને इ બિંદુમાં છેદે છે.

તો अडइब એક ચોરસ થશે.

સિદ્ધતા.

રચના પ્રમાણે अडइब એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ છે,

માટે, अब લીટી डइ ની બરોબર છે; અને अड, बइ બરોબર છે; (૧. ૩૪)

પણ अड લીટી अब બરોબર છે;

માટે, ચારે બાજૂઓ अब, अड, डइ, इब એકેકને બરોબર છે;

એટલે, अडइब આકૃતિ સમબાજૂ છે.

વળી बअड ખૂણો કાટખૂણો છે, (રચ.)

અને, अड, बइ સમાન્તર લીટીઓ ઉપર अब પડે છે.

માટે बअड, अबइ મળીને બે કાટખૂણા બરોબર છે. (૧. ૨૯)

માટે, अबइ ખૂણો પણ એક કાટખૂણા બરોબર હોવો જોઇએ.

અને તેઓની સામેના ખૂણા અનુક્રમે તેઓની બરોબર છે. (૧. ૩૪)

માટે, દરેક ખૂણો એક કાટખૂણા બરોબર છે.

એટલે, अबइड એક ચોરસ થયો;

અને તે अब લીટી ઉપર બનાવ્યો છે.

માટે એક આપેલી લીટી ઇ૦ कृ. कृ.

ઉપસિદ્ધાંતઃ—(૧) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણનો એક ખૂણો કાટખૂણો હોય તો બધા ખૂણા કાટખૂણા થશે; એ વિશે ૩૪ મી વ્યાખ્યાની ટીપમાં કહ્યું છે.

(૨) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની બે પાસપાસેની બાજૂઓ બરોબર હોય; અને તેઓની વચ્ચેનો ખૂણો કાટખૂણો હોય, તો તે એક ચોરસ થશે.

પ્રશ્ન.

(૧) એક લીટી ઉપર કેટલા ચોરસ બનાવી શકાય?

(૨) બરોબર બાજૂ ઉપરના ચોરસ પણ બરોબરજ હોવા જોઈએ.

(૩) જો બે લીટીઓ બરોબર હોય તો એક લીટી ઉપરનો ચોરસ બીજી લીટી ઉપરના ચોરસની બરોબર થશે. (કર્ણ દોરવાથી જે બબે ત્રિકોણો થશે તે સેહેજમાં બરોબર છે એવું સાબિત થઈ શકશે).

સિદ્ધાંત ૪૭. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—એક કાટખૂણ ત્રિકોણમાં કર્ણ ઉપર કહાડેલો ચોરસ બીજી બે બાજૂઓ ઉપર કહાડેલા ચોરસના સર્વાળાની બરોબર છે.

સાધન.

ધારો કે अबक **એક કાટખૂણ ત્રિકોણ છે.**

જેનો बअक ખુણો કાટખુણો છે;
તો बक કર્ણ ઉપર કહાડેલો ચોરસ
બે બાજૂઓ बअ, अक ઉપર કહાડેલા ચોરસોના સર્વાળાની બરોબર છે.

રચના.

कब લીટી ઉપર बडइक ચોરસ દોરો. (૧. ૪૬)
અને बअ, अक ઉપર बअगफ, अकमह ચોરસો દોરો.
अ બિંદુમાંથી अल લીટી बड અથવા कइને સમાન્તર દોરો; (૧. ૩૧)
અને अड, फक સાંધો.

સિદ્ધતા.

હવે बअक અને बअग દરેક કાટખુણો છે.
માટે, कअ, अग લીટીઓ એક જ સીધી લીટીમાં છે. (૧.૧૪)
વળી कबड ખુણો फबअ ખુણાની બરોબર છે,
કારણ કે દરેક કાટખુણો છે,
તેઓમાં अबक ખુણો ઉમેરો;
ત્યારે આખો ખુણો अबड આખા ખુણા फबकની બરોબર છે.
ત્યારે अबड, फबक ત્રિકોણોમાં,
अब લીટી फबની બરોબર છે,
અને बड લીટી बकની બરોબર છે,
અને अबड ખુણો फबक ખુણાની બરોબર છે.
માટે, अबड ત્રિકોણ फबक ત્રિકોણની બરોબર છે. (૧. ૪)

હવે बल સંખ્યા૦ ચતુષ્કોણ अबड ત્રિકોણનો બમણો છે,

કારણ કે તેઓ એકજ પાયા बड ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ बड અને अलની વચ્ચે છે. (૧.૪૧)

અને गब ચોરસ फबक ત્રિકોણનો બમણો છે,

કારણ કે તેઓ એકજ પાયા फब ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ फब, गकની વચ્ચે છે, (૧.૪૧)

પણ સરખી વસ્તુઓનાં બમણાં સરખાંજ હોવાં જોઈએ; (પ્ર. પ્ર. ૬)

માટે बल સંખ્યા૦ ચતુષ્કોણ गब ચોરસની બરોબર છે.

એજ પ્રમાણે, अइ, बम સાંધવાથી, એમ સિદ્ધ કરી શકીશું કે कल સંખ્યા૦ ચતુષ્કોણ कह ચોરસની બરોબર છે.

માટે આખો ચોરસ बइ, બે ચોરસો बग અને हक ના સર્વાળાની બરોબર છે.

એટલે, बक કર્ણ ઉપર કહાડેલો ચોરસ બે બાજુઓ अब, बक ઉપર કહાડેલા ચોરસોના સર્વાળાની બરોબર છે.

માટે એક કાટખૂણ ત્રિકોણમાં ઇ૦ प्र. सि.

ટીપ:—દરેક ચોરસ બહારથી દોરેલો છે; પણ તેમ કરવું આવશ્યક નથી; બધા અંદર પડતા અથવા હર કોઈ એક અથવા બે અંદર પડતા કહાડીશું તોપણ સિદ્ધતા મળી શકશે માટે જૂદી જૂદી આઠ આકૃતિઓ થઈ શકે.

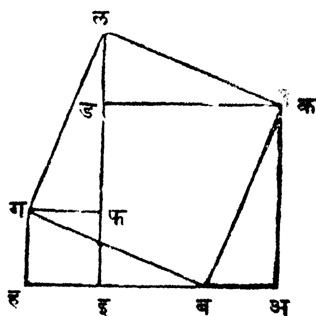
(૨) કોઈપણ બાજૂ ઉપરના ચોરસનું ક્ષેત્રફળ તે બાજૂને તેટલેજ ગુણવાથી આવે; માટે, અંકગણિતની રીતે આ સિદ્ધાંત કહેવો હોય તો એમ કહેવાય કે એક કાટખૂણ ત્રિકોણના કર્ણની લંબાઈનો વર્ગ તેની બન્ને બાજૂઓની લંબાઈના વર્ગના સર્વાળાની બરોબર છે.

(૩) માટે ત્રણમાંથી હરકોઈ બે બાજુઓની લંબાઈ આપી હોય તો ત્રીજીની લંબાઈ નીકળી શકશે.

(૪) ગમે એટલી સીધી લીટીઓ આપી હોય તો એક એવી સીધી લીટી શોધી કહાડવી કે તેનો વર્ગ આપેલી બધી લીટીઓના વર્ગના સર્વાળાની બરોબર હોય, આ કરવું સહેલું છે, ગમે તે બે લીટી લઈને તેમને છેડેથી એકેક ઉપર લંબ મૂકવી એટલે તેમના બીજા છેડા જોડવાથી નવી લીટી નિકળશે જેનો વર્ગ તે બેના વર્ગના સર્વાળા બરોબર થશે પછી તે લીટીને એક છેડેથી એક ત્રીજી લીટી જેટલી લંબ મૂકીને, છેડા સાંધીશું તો એક નવી લીટી નિકળશે &c.; એમજ વર્ગોની બાદબાકી પણ થઈ શકશે.

આ સિદ્ધાંતના જે બીજા પૂરાવા આપી શકાયછે તેમાં એક ઘણો ટુંકો અને ચતુરાઈવાળો છે એટલુંજ નહિ પણ તેમાં ૩૨ મા સિદ્ધાંત પછીનો કોઈ સિદ્ધાંત આધાર માટે લીધો નથીઃ અને કાગળ અથવા લાકડાના કકડા તેવા આકારના લેવાથી એક ચોરસના કકડા ગોઠવતાં બરાબર બીજા બે ચોરસ આપણી નજર સમક્ષ થઈ શકેછેઃ તે એક સિદ્ધતા નીચે ટુંકામાં આપીછે.

अबक આપેલો ત્રિકોણ છે **अ** કાટખૂણો; **अक** ઉપર **अकडइ** ચોરસ કીધો. **इड** લીટીમાંથી **इफ**=**बअ** કાપી. **इफ** ઉપર **इफगह** ચોરસ કીધો. **इड**ને લંબાવીને **डल**=**अब** કીધી; **कल**, **लग**, **गब** સાંધી.



डल=अब ∴ डल+डफ=अब+डफ=इफ+डफ=डइ=अक्र
તેમજ हब=हइ+इब=अब+इब=अइ=अक.

આ ઉપરથી ચારે ત્રિકોણો अबक, बगह, लगफ અને लडक્ર બરોબર થશે, કારણ કે દરેકમાં બે બાજૂઓ અને વચ્ચેનો કાટખૂણો સરખાં છે.

માટે लगकब આકૃતિ સમબાજૂ થઈ,
√लकब=√लकड+√डकब=√अकब+√डकब+√डकअ.

માટે लकब કાટખૂણો થયો; એજ પ્રમાણે ચારે ખૂણા કાટખૂણા સિદ્ધ થશે, માટે એ આકૃતિ ચારસ છે અને बक લીટી ઉપર ચારસ છે.

એ ચારસમાંથી બે ત્રિકોણો लडक અને लगफ બાદ કરો અને તેઓની બરોબરના ત્રિકોણો अबक અને बगह ઉમેરો તો બરાબર अड અને गइ ચોરસો થશે.

આ સિદ્ધાંત ગણિતવિદ્યાના હરેક ભાગમાં બેહદ ઉપયોગનો છે એમાંથી હદ ઉપરાંત પરિણામો નિકળેછે; આખી ભૂમિતિનાં મુળતત્ત્વોમાં એ ઘણોજ પ્રખ્યાત છે એટલુંજ નહિ પણ એના ઉપર માપણીના બધા સિદ્ધાંતો તથા ત્રિકોણમિતિની વિદ્યા આધાર રાખેછે.

કહેછે કે એ પ્રતિજ્ઞા જ્યારે પિથાગોરસે શોધી કહાડી અને તેની સત્યતા વિશે જ્યારે તેને પહેલું જ્ઞાન થયું ત્યારે તેને એટલો હર્ષ પ્રાપ્ત થયો કે તેણે એકસો જનાવરનો મ્હોટો બલીદાન દેવતાઓને આપ્યો (અર્પણ કર્યો).

પ્રશ્ન.

(૧) આકૃતિ ઉપરથી સાબિત કરો કેઃ—
 (૧) बग, कह જોડિયે તો તેઓ સમાન્તર થશે;
 (૨) फ, अ, म બિંદુઓ એકજ સીધી લીટીમાં છે;
 (૩) फक અને अड એકેકને લંબ છે;

(૨) એક ચોરસના કર્ણ ઉપર દોરેલો ચોરસ અસલ ચોરસનો બમણો થશે.

(૩) જો કોઇપણ ત્રિકોણના શિરોબિંદુથી પાયા ઉપર લંબ દોર્યો, તો ખંડો (પાયાના બે ભાગો) ના વર્ગની બાદબાકી તે બે બાજૂઓના વર્ગની બાદબાકીની બરોબર થશે.

(૪) બે કાટખૂણ ત્રિકોણમાં એકનો કર્ણ અને એક બાજૂ અનુક્રમે બીજાના કર્ણ અને એક બાજૂની બરોબર હોય, તો તે બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર થશે.

(૫) એક લીટી એવી શોધી કહાડો કે તે ઉપરનો ચોરસ બે આપેલી લીટીઓના ચોરસની બાદબાકી બરોબર થાય.

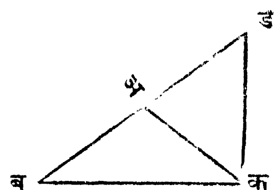
(૬) એક આપેલી સીધી લીટીના બે એવા ભાગ કરો કે એક ભાગ ઉપરનો ચોરસ બીજા ભાગ ઉપરના ચોરસનો બમણો થાય.

સિદ્ધાંત ૪૮. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞાઃ—જો એક ત્રિકોણની એક બાજૂ ઉપર કીધેલો ચોરસ બીજી બે બાજૂ ઉપરના ચોરસોના સર્વાળાની બરોબર હોય, તો તે બે બાજૂઓની વચ્ચેનો ખૂણો કાટખૂણો થશે.

સાધન.

ધારો કે अबक એક ત્રિકોણ છે; અને बक ઉપર કહાડેલો ચોરસ अब, अक ઉપરના ચોરસોના સર્વાળાની બરોબર છે;



તો बअक ખૂણો કાટખૂણો થશે.

રચના.

अ બિંદુમાંથી अड લીટી अक ને લંબ દોરો; (૧. ૧૧)
અને अड ને अब બરોબર કરો. (૧. ૩)
डक સાંધો.

સિદ્ધતા.

અડ લીટી અબની બરોબર છે, (રચ.)

માટે અડ લીટી ઉપરનો ચોરસ અબ લીટી ઉપરના ચોરસની બરોબર થશે. (૧. ૪૬ પ્રશ્ન ૩ જો ટીપ.)

એ બન્નેમાં અક ઉપરનો ચોરસ ઉમેરો;

તો કઅ અને અડ ઉપરના ચોરસોનો સર્વાળો કઅ અને અબ ઉપરના ચોરસોના સર્વાળાની બરોબર છે.

પણ કઅડ ખૂણો કાટખૂણો છે, (રચ.)

માટે કડ ઉપરનો ચોરસ અક, અડ ઉપરના ચોરસોના સર્વાળાની બરોબર છે. (૧. ૪૭)

પણ (પ્રતિજ્ઞા પ્રમાણે) બક ઉપરનો ચોરસ અક, અબ ઉપરના ચોરસોના સર્વાળાની બરોબર છે;

માટે કડ ઉપરનો ચોરસ બક ઉપરના ચોરસની બરોબર છે.

માટે કડ બાજુ પણ બક બાજુની બરોબર હોવી જોઇએ.

માટે ડઅક, બઅક ત્રિકોણોમાં,

{ અડ લીટી અબની બરોબર છે,
અને અક બન્નેમાં સાધારણ છે,
અને ત્રીજી બાજુ કડ ત્રીજી બાજુ બકની બરોબર છે,

માટે, ડઅક ખૂણો બઅક ખૂણાની બરોબર છે. (૧. ૮)

પણ ડઅક કાટખૂણો છે; (રચ.)

માટે બઅક પણ કાટખૂણો થયો.

માટે જો એક ત્રિકોણની એક બાજુ ઉપર ૬૦ પ્ર. સિ.

પ્રશ્ન.

(૧) ૪૭ અને ૪૮મા સિદ્ધાંતો વચ્ચે શો સંબંધ છે?

(૨) આ સિદ્ધાંતનો પુરાવો કેવા પ્રકારનો છે? અને ભૂમિતિના પહેલા પુસ્તકમાં એવા પુરાવાથી કયા સિદ્ધાંતો સાબિત કીધા છે? તેમ કરવાનું કારણ શું?

(૩) જો अबक ત્રિકોણમાં अब બાજુ अब ની બમણી હોય, અને अक નો વર્ગ अब ના વર્ગનો ત્રણ ગણો હોય તો बअक ખુણો કાટખુણો થશે.

છેલ્લા ત્રણ સિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્ન.

(૧) કોઈ લીટી ઉપરનો ચોરસ તે લીટીના અર્ધ ઉપરના ચોરસનો ચાર ગણો થશે; અને તેના એક તૃતીયાંશ ઉપરનો ચોરસનો નવ ગણો થશે.

(૨) એક ત્રિકોણની એક બાજુ ઉપરનો ચોરસ બીજી બે બાજુઓ ઉપરના ચોરસના સર્વાળાથી વધારે હોય; તો તે બાજુઓ વચ્ચેનો ખુણો પહોળોખુણો હોવો જોઈએ.

(૩) એક સમદ્વિબાજુ કાટખુણ ત્રિકોણના કર્ણ અને એક બાજુ વચ્ચે શો સંબંધ છે?

(૪) એક કાટખુણ ત્રિકોણમાં એક ખુણો એક કાટખુણાનો તૃતીયાંશ હોય તો બીજા ખુણા કેટલા કેટલા થવા જોઈએ? અને તેવા ત્રિકોણની દરેક બાજુ કર્ણનો કેટલો ભાગ થશે?

(૫) એક સમબાજુ ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી સામેની બાજુ ઉપર દોરેલી લંબ દરેક બાજુનો કેટલો ભાગ થશે?

(૬) એક કાટખુણ ત્રિકોણના કાટખુણાથી કર્ણ ઉપર લંબ દોરીને કર્ણના દરેક ભાગના વર્ગના સર્વાળામાં લંબના વર્ગનું બમણું ઉમેરિયે તો કર્ણના વર્ગ બરોબર થશે.

(૭) એક ચોરસ એવો બનાવો કે તે બે આપેલા ચોરસના સર્વાળા બરોબર થાય.

(૮) એક આપેલી સીધી લીટીના બે એવા ભાગ કરો કે તેઓના વર્ગનો સર્વાળો એક આપેલી લીટીના વર્ગની બરોબર થાય.

સમાપ્ત.